

**Giulio Erberto Cantarella
Pietro Velonà**

**ASSEGNAZIONE A RETI
DI TRASPORTO**

**Modelli di processo
deterministico**

FrancoAngeli

*Strumenti per l'analisi
dei sistemi di trasporto*

Università di Salerno

Università Mediterranea di Reggio Calabria

Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con



La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta [cliccando qui](#) le nostre F.A.Q.



Nel quadro della riforma universitaria, nell'ambito dell'Area Trasporti della Facoltà di Ingegneria e del DIIES, presso l'Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria, è emersa la necessità di fornire agli allievi, dei differenti livelli, un insieme di pubblicazioni agili che affiancassero i volumi orientati su contenuti teorici consolidati della disciplina e quelli inerenti le tematiche affrontate con metodologie innovative. Gli obiettivi sono quelli di supportare le attività didattiche dei moduli della nuova offerta, con contenuti pari a 4 ÷ 6 crediti, per le lauree e per i master, e di dare spazio ai contenuti delle ricerche applicate che possano costituire riferimento per moduli di dottorato o master di II livello.

Quest'insieme di pubblicazioni vuole quindi fornire strumenti di studio e/o operativi per l'analisi dei sistemi di trasporto ed a tal fine è rivolto agli studenti di Ingegneria ed agli operatori del settore trasporti.

L'attività di supporto alla nuova didattica dei differenti livelli si affianca a quella di ricerca attiva presso l'Università Mediterranea di Reggio Calabria, che è documentata tra l'altro da vari volumi e dai seminari scientifici annuali, aperti al contributo di tutti gli studiosi del settore, intitolati Metodi e Tecnologie dell'Ingegneria dei Trasporti.

Francesco Russo

Il Gruppo Trasporti del Dipartimento di Ingegneria Civile presso l'Università degli Studi di Salerno si unisce alla tradizione iniziata dal collega e amico Francesco Russo.

Giulio Erberto Cantarella

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: www.francoangeli.it e iscriversi nella home page al servizio “Informatemi” per ricevere via e.mail le segnalazioni delle novità.

Dipartimento di
Ingegneria Civile

Università degli Studi
di Salerno

Dipartimento di Ingegneria
dell'Informazione, delle Infrastrutture
e dell'Energia Sostenibile (DIIES)

Università degli Studi
Mediterranea
di Reggio Calabria

**Giulio Erberto Cantarella
Pietro Velonà**

**ASSEGNAZIONE A RETI
DI TRASPORTO**

**Modelli di processo
deterministico**

*Strumenti per l'analisi
dei sistemi di trasporto*

FrancoAngeli

Publicato con il contributo del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università degli Studi di Salerno.

Copyright © 2020 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy.

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito www.francoangeli.it.

Dedico questo lavoro a mia moglie Rosa dinamica presenza nella mia vita.
Giulio Erberto Cantarella

*Dedico questo lavoro a chi, in questi anni, mi ha accompagnato con pazienza
nei miei viaggi culturali.*
Pietro Velonà

Indice

Introduzione [primo tomo], di Giulio Erberto Cantarella	pag.	11
Introduzione [secondo tomo], di Giulio Erberto Cantarella	”	13
<i>PARTE I - MODELLI DI PROCESSO DETERMINISTICO PER L'ANALISI DI UN SISTEMA DI TRASPORTO</i>		
1. Offerta di trasporto e domanda di mobilità	”	17
1.1. Modelli di offerta	”	18
1.2. Modelli di domanda	”	20
1.2.1. Filtri di apprendimento e previsione	”	20
1.2.2. Modelli del comportamento di scelta	”	23
2. Assegnazione con modelli di processo deterministico	”	31
2.1. Stati di punto fisso di un modello di processo deterministico e stati di equilibrio	”	33
2.2. Condizioni di esistenza degli stati di punto fisso	”	39
2.3. Condizioni di unicità degli stati di punto fisso	”	40
2.3.1. Condizioni di unicità per modelli QP	”	41
2.3.2. Condizioni di unicità per modelli S	”	42
2.4. Condizioni di stabilità degli stati di punto fisso	”	45
2.4.1. Condizioni di stabilità per modelli del tipo $\alpha\beta$	”	47
2.4.2. Biforcazioni per modelli del tipo $\alpha\beta$	”	54
2.5. Nota bibliografica	”	56
2.A. Appendice: dimostrazioni delle proposizioni 2.9 e 2.10	”	60
2.B. Appendice: analisi grafica delle regioni di stabilità	”	69

3. Applicazioni a casi particolari	pag.	73
3.1. Introduzione	”	73
3.2. Sistema di trasporto privato con una coppia O-D e due percorsi	”	75
3.2.1. Formulazione del modello dinamico, stati di punto fisso e loro stabilità	”	75
3.2.2. Risultati numerici	”	83
3.3. Sistema di trasporto privato con una coppia O-D e tre percorsi	”	94
3.3.1. Formulazione del modello dinamico, stati di punto fisso e loro stabilità	”	94
3.3.2. Risultati numerici	”	96
3.4. Sistema di trasporto con una coppia O-D e due alternative modali	”	102
3.4.1. Formulazione del modello dinamico, stati di punto fisso e loro stabilità	”	102
3.4.2. Risultati numerici	”	106

PARTE 2 - TEORIA DEI PROCESSI DETERMINISTICI

4. Definizioni generali	”	119
4.1. Introduzione	”	119
4.2. Insiemi limite ed attrattori	”	121
4.3. Stabilità	”	123
4.A. Appendice: bacini di attrazione	”	128
5. Processi deterministici lineari	”	133
5.1. Introduzione	”	133
5.2. Evoluzione nel tempo	”	133
5.2.1. Espressione della matrice di transizione	”	135
5.2.2. Analisi dell'evoluzione libera	”	137
5.3. Stati di punto fisso	”	139
5.4. Analisi di stabilità	”	142
5.5. Sistemi a due dimensioni	”	149
6. Processi deterministici non lineari	”	153
6.1. Introduzione	”	153
6.2. Evoluzione nel tempo e convergenza a differenti attrattori	”	153
6.3. Stati di punto fisso	”	162
6.4. Analisi di stabilità degli stati di punto fisso e biforcazioni	”	165

	6.4.1. Metodo della funzione di Lyapunov	pag.	165
	6.4.2. Metodo dell'analisi dell'autosistema	”	167
6.5.	Sistemi a due dimensioni	”	176
6.6.	Conclusioni	”	198
Appendice – Integrazioni di algebra matriciale			” 201
A.1.	Introduzione	”	201
A.2.	Matrici non negative	”	201
A.3.	Matrici stocastiche	”	203
A.4.	Matrici convergenti	”	204
Bibliografia			” 205

Introduzione [primo tomo]

di Giulio Erberto Cantarella

Tutto ciò che non si condensa in un'equazione non è scienza.
(Albert Einstein, *Come io vedo il mondo*)

I modelli di assegnazione della domanda di mobilità a reti di trasporto sono utilizzati per la simulazione dei sistemi di trasporto, nei quali i flussi risultanti dalle scelte degli utenti sono influenzati dai costi di trasporto risultanti dal livello di servizio offerto ed i costi possono essere influenzati dai flussi a causa della congestione. Questi modelli simulano l'interazione tra:

- *domanda di mobilità* che si riferisce agli effetti del livello di servizio sul comportamento degli utenti;
- *offerta di trasporto* che esprime (se e) come il comportamento degli utenti ha effetto sul livello di servizio offerto dal sistema (tempo di viaggio, ecc.).

Essi sono utilizzati nella progettazione delle caratteristiche dell'offerta di trasporto (Supply Design), ad esempio dei parametri della regolazione semaforica di una intersezione isolata o di una rete di intersezioni (Signal Setting).

Il presente testo si rivolge alla comunità scientifica e professionale del settore, la sua natura ne consente l'utilizzo come strumento didattico. La trattazione proposta include contributi originali sviluppati dagli autori, in alcuni casi per questo testo. Essa sviluppa compiutamente gli aspetti teorici, senza necessità di riferimenti esterni ulteriori, pertanto risulta un approfondimento di quella presente in testi generali di analisi dei sistemi di trasporti (ad esempio Cascetta, 2006). La applicazione dei modelli presentati alla progettazione dei sistemi di trasporto sarà oggetto di altri volumi.

La trattazione dei modelli per l'assegnazione alle reti di trasporto è accompagnata da una presentazione degli strumenti matematici adottati, oltre le conoscenze di base dell'analisi. Allo scopo, si è reso necessario sviluppare una presentazione unificante (con alcuni elementi di originalità) dei modelli matematici astratti, in generale descritti in testi differenti, costituiti da sistemi di equazioni rispetto a variabili.

(Per una introduzione ai modelli matematici ed una loro classificazione si veda ad esempio *Introduzione alla modellizzazione dinamica nella biologia applicata*, di Giuseppe Pulina *et al.*, 2000).

Appare opportuno rilevare che si assume che il lettore abbia dimestichezza con gli elementi di base della teoria della probabilità.

Delle numerose proposizioni presenti nel volume si riportano, per la maggior parte di esse, le dimostrazioni. In particolare si noti che:

- si rimanda alle note bibliografiche per le proposizioni non dimostrate;
- si omettono i riferimenti bibliografici per le proposizioni dimostrate e ampiamente diffuse in letteratura;
- si evidenziano i riferimenti bibliografici per le proposizioni dimostrate e non ancora diffuse in letteratura;
- si evidenziano le proposizioni di cui gli autori sviluppano la dimostrazione;
- si evidenziano le proposizioni introdotte dagli autori in questo testo e/o pubblicate altrove.

Il presente testo costituisce il primo tomo di una collana che si prefigge di rendere disponibili, in una unica trattazione coerente e auto-contenuta, i principali risultati in letteratura sull'assegnazione alle reti di trasporto, tra cui alcuni materiali di difficile accesso. La trattazione procede per generalizzazioni successive dai modelli statici derivati dalla teoria dei punti fissi, presentati in questo tomo, a quelli dinamici derivati dalla teoria dei sistemi dinamici non lineari in tempo discreto (secondo tomo, in corso di completamento) o dalla teoria dei processi stocastici in spazi continui (terzo tomo, già programmato). Alcuni degli strumenti matematici descritti troveranno applicazione nei tomi successivi della collana, e sono riportati qui per completezza di trattazione.

Ringraziamenti

Ringrazio l'amico e collega Francesco Russo per le numerose conversazioni serali sui numerosi aspetti della analisi dei sistemi di trasporti. Ringrazio, inoltre, il gruppo Last dell'Università Mediterranea degli Studi di Reggio Calabria per il supporto alla pubblicazione di questo volume.

Mi è particolarmente gradito confermare al giovane coautore, Pietro Velonà, la stima personale e l'amicizia che questa esperienza comune ha rafforzato. Sono emerse, accanto al suo ingegno brillante e al suo talento per le trattazioni matematiche già noti, doti di determinazione e perseveranza che, unite alla maturità scientifica raggiunta, ne fanno una sicura promessa della comunità scientifica e accademica.

Fisciano (SA), 23 ottobre 2009

Introduzione [secondo tomo]

di Giulio Erberto Cantarella

A theory is just a mathematical model to describe the observations.
Karl Popper

*What distinguishes a mathematical model from, say,
a poem, a song, a portrait or any other kind of "model,"
is that the mathematical model is
an image or picture of reality painted with logical symbols
instead of with words, sounds or watercolors.*
John L. Casti

In questo secondo tomo prosegue la trattazione dei modelli di assegnazione della domanda di mobilità a reti di trasporto, iniziata nel primo tomo (Cantarella, Velonà, 2010). In particolare, si introducono e si discutono i modelli di Processo Deterministico che consentono di analizzare la dinamica interperiodale di un sistema di trasporto. I modelli di punto fisso per l'assegnazione di equilibrio discussi nel primo tomo risultano un caso particolare dei modelli descritti in questo secondo tomo.

Il volume è diviso, come il precedente, in due parti: la prima riguarda i modelli di Processo Deterministico per l'analisi di un sistema di trasporto, suddivisa in modelli e semplici applicazioni, la seconda riporta per utile riferimento del lettore i principali strumenti teorici adottati.

È singolare che questo volume si basi su una bozza quasi completa scritta circa dieci anni fa e poi andata perduta. Recentemente Pietro Velonà la ha ritrovata nella memoria di un vecchio PC consentendoci di riprendere il progetto editoriale, aggiornandola con più recenti risultati.

Ringraziamenti

Ringrazio gli amici e colleghi Francesco Russo per le numerose conversazioni serali sui numerosi aspetti della analisi dei sistemi di trasporti, e David

Paul Watling per il tempo trascorso insieme parlando della analisi dinamica dei sistemi di trasporto.

Mi è particolarmente gradito notare che questa ulteriore esperienza comune mi abbia permesso di consolidare l'amicizia e l'affetto che mi lega a Pietro Velonà, le cui doti umane e scientifiche sono note a chiunque lo conosca.

Fisciano (SA), 23 gennaio 2020

PARTE 1

*MODELLI DI PROCESSO DETERMINISTICO PER
L'ANALISI DI UN SISTEMA DI TRASPORTO*

1. Offerta di trasporto e domanda di mobilità

Solitamente i modelli di assegnazione si riferiscono a opportuni intervalli di tempo, che possono anche essere una parte dell'intero giorno come ad esempio l'ora di punta del mattino; nel seguito, per semplicità, il periodo di riferimento sarà il giorno e sarà indicato con l'indice t (pedice).

Si considerano inoltre gli utenti raggruppati in n_i classi, in modo tale che tutti gli individui della classe i siano omogenei in tutti i comportamenti caratteristici; in particolare essi si spostano tra la stessa coppia O-D (possibilmente per lo stesso motivo) ed hanno m_i possibili percorsi appartenenti ad un insieme K_i comune a tutti gli utenti della classe i . Sia $m = \sum_i m_i$ il numero totale dei percorsi. Senza perdita di generalità si assume che i percorsi siano ordinati in modo tale che il percorso k sia univocamente associato alla classe i , ossia $k \in K_i$. Si noti inoltre che l'assunzione precedente non implica necessariamente un modello di rete aggregato, poiché in linea di principio ogni centroide può essere espanso per essere rappresentativo di suddivisioni più disaggregate degli utenti (al limite ogni centroide può rappresentare un utente del sistema).

Ogni giorno t , $d_{t,i}$ utenti della classe i , nell'unità di tempo, effettuano una scelta di viaggio, come quella rappresentata dalla scelta del percorso in una rete. L'elasticità della domanda può essere trattata introducendo un'alternativa fittizia (in particolare un percorso) corrispondente alla scelta di non spostarsi affatto, in modo tale che il flusso O-D possa essere assunto costante per giorni successivi. Sia:

d_i il numero di viaggiatori (potenziali) per la classe di utenza i ossia la domanda di spostamento per la classe i , con $d_{t,i} = d_i$, non negativa.

Il risultato del comportamento di scelta dell'utente generico nel giorno t può essere espresso attraverso il numero di utenti (per unità di tempo) che seguono ogni percorso (assumendo che, in linea di principio, un percorso può rappresentare anche altre dimensioni di scelta, quali il modo e/o la destinazione), e sia:

$h_{t,k}$ il flusso sul percorso k al giorno t ,
 \mathbf{h}_t il vettore di flusso di percorso ($m \times 1$) nel giorno t ,

risulta che:

$$\sum_{k \in K_i} h_{t,k} = d_i$$

Ogni vettore non negativo $\mathbf{h} \geq \mathbf{0}$ di dimensioni ($m \times 1$) che soddisfi la relazione precedente sarà detto vettore di flusso di percorso fattibile; poiché la domanda è una quantità positiva e, senza perdita di generalità, può essere assunta superiormente limitata, i vettori di flusso di percorso fattibili sono non negativi e superiormente limitati, ossia essi appartengono ad un insieme H che è chiuso e limitato (e quindi compatto), ed è inoltre convesso perché definito dall'intersezione di insiemi convessi (iperpiani e/o semispazi).

Quindi, un modello di assegnazione consente di definire tra tutti i possibili vettori di flusso di percorso quel vettore di flusso di percorso (se esiste), corrispondente ad un dato livello di domanda e che soddisfa le assunzioni sul comportamento degli utenti e sulle caratteristiche dell'offerta. In particolare, i flussi di percorso sono il risultato del comportamento di scelta dell'utente che a sua volta è funzione delle previsioni proprie dell'utente circa le prestazioni del sistema di offerta, come appreso da precedenti osservazioni relativamente all'attuale funzionamento del sistema stesso. Tutti questi argomenti saranno trattati nel paragrafo seguente.

1.1. Modelli di offerta

La topologia della rete è generalmente rappresentata attraverso un grafo con n archi ed m percorsi. Sia:

B la matrice di incidenza archi-percorsi ($n \times m$), e sia \mathbf{B}^T la sua trasposta, dove il generico elemento b_{ak} vale 1 se l'arco a appartiene al percorso k , vale 0 altrimenti.

Sia anche:

$f_{t,a}$ il flusso sull'arco a nel giorno t ;
 \mathbf{f}_t il vettore di flussi d'arco di dimensioni ($n \times 1$) nel giorno t .

Risulta, pertanto, la seguente relazione tra il vettore dei flussi di arco e il vettore dei flussi di cammino, attraverso la matrice di incidenza archi-percorsi **B**:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{B} \mathbf{h}_t$$

Ogni vettore di flussi d'arco che corrisponde ad un vettore di flussi di percorso fattibile è detto a sua volta fattibile; l'insieme di fattibilità (o ammissibilità) per i flussi d'arco è a sua volta chiuso, limitato e convesso.

Le prestazioni della rete sono solitamente espresse attraverso i costi di trasporto generalizzati relativi all'arco, indicati con:

$c_{t,a}$ costo sull'arco a nel giorno t ;

\mathbf{c}_t vettore dei costi d'arco di dimensioni $(n \times 1)$ nel giorno t .

Si può notare che tutti gli utenti che si spostano lungo un ramo percepiscono lo stesso costo generalizzato di trasporto, cosicché si dovrebbe associare un ulteriore arco rappresentativo dello stesso collegamento fisico, ma relativo a una diversa categoria di utenti che percepisce in modo diverso il costo di trasporto.

Per semplicità si assume che i valori attesi dei costi d'arco siano funzioni deterministiche dell'intero vettore dei flussi (e si definiscono funzioni di costo non separabili), ossia: $c_{t,a} = c(\mathbf{f}_t)$, o anche in termini vettoriali:

$$\mathbf{c}_t = c(\mathbf{f}_t)$$

L'assunzione frequentemente fatta sulla *separabilità* delle funzioni di costo (quando, cioè, il costo dipende soltanto dal flusso sull'arco corrispondente), matematicamente espressa come: $c_{t,a} = c(f_{t,a})$, è naturalmente un caso particolare dell'assunzione più generale di non separabilità.

Le prestazioni della rete rilevanti per gli utenti del sistema sono solitamente espresse in relazione ai costi generalizzati di trasporto di percorso, indicati con:

$g_{t,k}$ costo sul percorso k nel giorno t ;

\mathbf{g}_t vettore dei costi di percorso di dimensioni $(m \times 1)$ nel giorno t .

Risulta, pertanto, la seguente relazione tra vettore dei costi di percorso e vettore dei costi d'arco, attraverso la matrice di incidenza archi-percorsi \mathbf{B} :

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{c}_t \tag{1.1}$$

Quindi, un modello di offerta è completamente specificato una volta che siano date la matrice di incidenza archi-percorsi, che definisce la topologia della rete di trasporto, e le funzioni di costo d'arco. Matematicamente, questa condizione è espressa da: