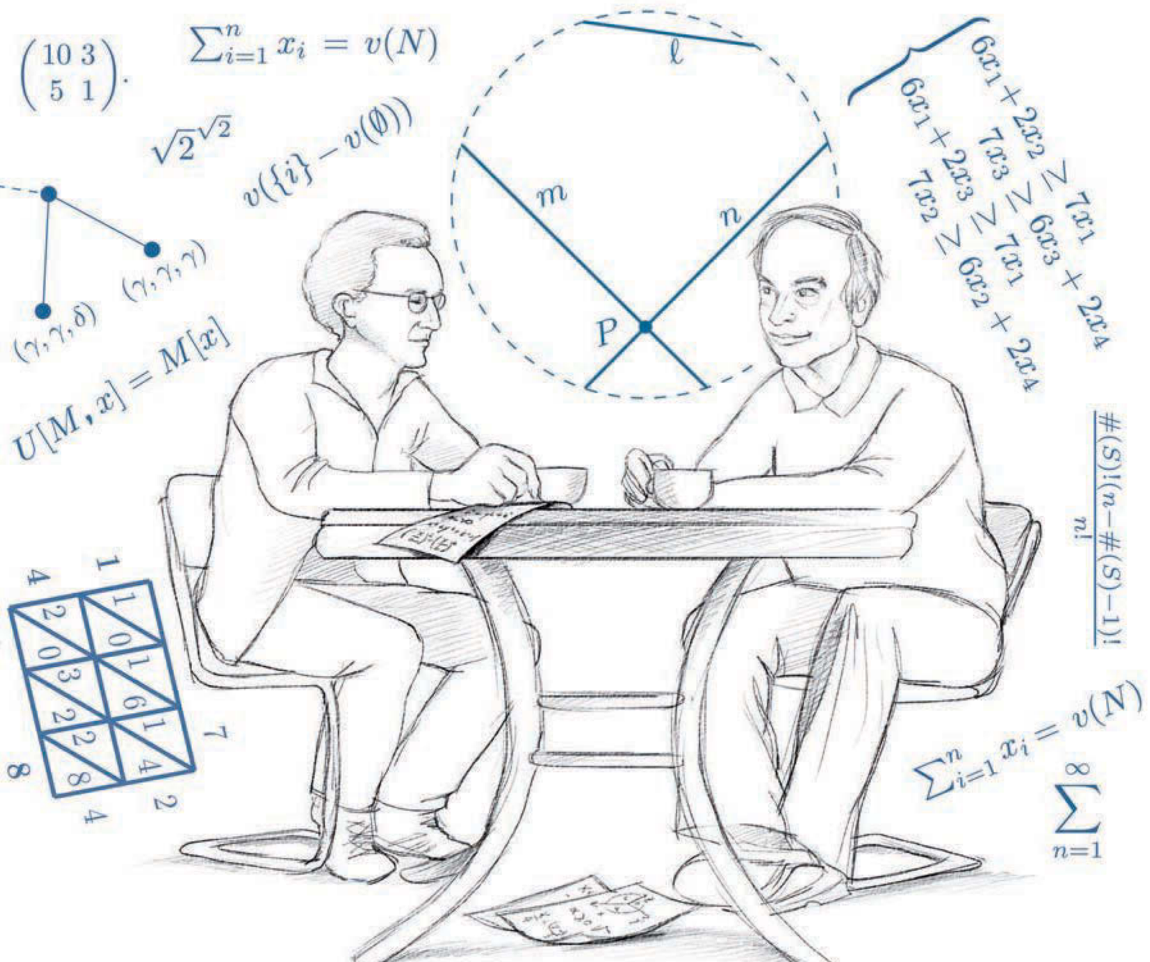
Roberto Lucchetti, Giuseppe Rosolini

MATEMATICA AL BAR

Conversazioni su giochi, logica e altro



FrancoAngeli

Roberto Lucchetti, Giuseppe Rosolini

MATEMATICA AL BAR

Conversazioni su giochi, logica e altro

Prefazione di Claudio Bartocci

FrancoAngeli

Grafica di copertina: Elena Pellegrini

Progetto grafico di interno e realizzazione: Maurizio Costa, Milano

Indice

Prefazione		pag.	VII
Introduzione		»	1
1	**Che cosa vuol dire risolvere un gioco**	»	3
2	**Giochi: le basi teoriche per studiarli**	»	15
3	**Giochi e paradossi**	»	24
4	**Giochi: qualche formalizzazione, comunque sempre da bar**	»	34
5	**Giochi: un diverso approccio**	»	52
6	**J. F. Nash jr**	»	66
7	**Matematica, sport, talento**	»	75
8	**Watzlawick e l'implicazione matematica**	»	83
9	**Logica? Una, nessuna, centomila**	»	93
10	**Kurt Gödel**	»	108
11	**Solo cinque teoremi**	»	118

12 Alan M. Turing	pag.	127
13 La gelosia e la macchina che fa le somme	»	140
14 Omaggio a Genova	»	147
15 Omaggio a Mantova	»	153

Prefazione

Non è infrequente che i matematici si trovino a discorrere della loro disciplina al di fuori degli usuali ambienti di lavoro. Ne risultano discussioni, com'è ovvio, più rilassate e informali, ma non meno appassionate, profonde e creative di quelle che hanno luogo davanti a una lavagna, con il gesso in mano.

In molti casi sono i paesaggi agresti, o anche la semplice cornice di un qualche parco cittadino, a ispirare queste conversazioni. Tra il 1884 e il 1892, per esempio, David Hilbert e i suoi amici Hermann Minkowski e Adolf Hurwitz percorrono in lungo e in largo le contrade che circondano la città di Königsberg (oggi Kaliningrad): «nel corso di innumerevoli passeggiate – racconterà lo stesso Hilbert – abbiamo, in quegli otto anni, frugato in tutti gli angoli del sapere matematico, e Hurwitz con la sua conoscenza tanto vasta e poliedrica quanto solidamente fondata e ben ordinata era per noi sempre la guida». Negli anni Trenta del secolo scorso, questa volta nella campagna intorno a Göttingen, Emmy Noether fa lunghe gite con i suoi studenti, a passo tranquillo (possiamo immaginare), non rinunciando a una sostanziosa merenda all'aperto, e discorrendo nel frattempo di anelli, ideali e polinomi – la chioccia dell'algebra con i suoi pulcini. All'incirca un decennio più tardi, nella quiete dei viali di Princeton, è invece la teoria della relatività l'argomento principale delle causeries tra Kurt Gödel e Albert Einstein, che amano andare a spasso insieme, legati da un'amicizia basata (è stato scritto) «più sulle differenze di opinione che sui punti di accordo».

Ma forse più spesso che alle seduzioni bucoliche della natura i matematici (uomini e donne assai meno ascetici di quanto se li figuri l'opinione comune) cedono alle lusinghe di una tazza di caffè, di un boccale di birra, o di un bicchiere di vino, e non disdegnano le tentazioni della buona tavola. E talvolta, nel conviviale intrecciarsi di ragionamenti più o meno zoppicanti e improvvisate congetture, si è assistito al germogliare di grandi idee matematiche. Nessuno storico sfaccendato ha ancora trovato il tempo di stilare un inventario dei caffè, bar, pub e ristoranti, delle birrerie, taverne e brasserie, che hanno segnato la storia della matematica. Gli esempi illustri, comunque, non mancano. Nell'inverno 1934-1935, a Parigi, un gruppo di

amici – tra cui André Weil, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Claude Chevalley e Jean Delsarte – prendono a incontrarsi abitualmente in un ristorante (oggi scomparso) di boulevard Saint-Michel: è l'atto di nascita di Nicolas Bourbaki, destinato ad affermarsi come il più celebre e influente matematico collettivo del Novecento. Pressappoco negli stessi anni, tra il 1935 e il 1941, all'altro capo d'Europa, nella città, allora polacca, di Lwów (Leopoli), una conventicola di tipi piuttosto originali e anticonformisti si ritrova quasi ogni sera nei rumorosi locali del Kawiarnia Szkocka, il Caffè Scozzese. Stefan Banach, Stanislaw Mazur, Hugo Steinhaus, Karol Borsuk, Stanislaw Ulam, tra una birra e l'altra, discutono animatamente, azzardano congetture, si sfidano con difficili problemi: al centro dei loro interessi stanno i domini, a quel tempo ancora largamente inesplorati, dell'analisi funzionale, della teoria degli insiemi, della teoria della misura, della topologia. Occasionalmente, prendono parte a queste riunioni, come ospiti, anche insigni matematici forestieri, i quali si lasciano di buon grado contagiare dall'atmosfera bohemienne che si respira al Kawiarnia Szkocka: Maurice Fréchet, per esempio, Lazar Ljusternik, e János von Neumann, che nel 1937 propone un quesito più che arduo mettendo in palio per il solutore «una bottiglia di whisky di misura > 0» (mai assegnata).
I lettori, dunque, non devono stupirsi del fatto che le conversazioni che costituiscono l'oggetto di questo libro si svolgano in ambienti che ben poco hanno di accademico: è quasi un atto di omaggio a una nobile e radicata tradizione. Né devono meravigliarsi che i due autori, oltre a confrontarsi sui loro terreni favoriti – la teoria dei giochi e la logica –, si divertano a divagare toccando temi – la letteratura, il tennis, il «talento naturale» – all'apparenza molto distanti dalla matematica. All'apparenza: perché concepire la matematica come un'attività incontaminata e avulsa dalla multiforme varietà del mondo e della cultura è tanto insensato quanto confinare entro un esiguo recinto la curiosità di chi, quella varietà, aspira a indagare e conoscere.
Con la leggerezza propria di ogni gioco dell'intelligenza ben congegnato, le pagine che seguono mostrano, una volta di più, che la scoperta matematica non solo è frutto dell'esercizio di un sistematico «dubbio relativo», ma che essa – come ebbe a osservare qualcuno – è di per sé «sovversiva e sempre incline a infrangere i tabù».

Claudio Bartocci

Introduzione

Si può diventare amici in molti modi, e uno di questi è incontrandosi nel posto di lavoro. Tuttavia nel nostro ambiente l'occasione più abituale per fare amicizia consiste o nel fatto che si lavora nello stesso settore, quindi si lavora assieme, ci si incontra a congressi, seminari e attività varie di questo tipo, oppure perché si è nello stesso dipartimento e si ha qualche interesse comune, come lo sport, o la passione per l'orto, o altri motivi più o meno casuali.
Accade però a volte, ed è il nostro caso, che le occasioni di incontro e quindi poi i primi passi per un'amicizia abbiano percorsi diversi.
A noi ha indubbiamente aiutato che il logico mantovano sia andato a lavorare a Genova, dove l'analista genovese, pur essendo emigrato in terre più vivaci (ma infinitamente meno belle, almeno per uno che è nato sentendo l'odore e il rumore del mare) torna di quando in quando, anche se sempre troppo poco per la sua famiglia d'origine.
Noi ci siamo conosciuti perché uno dei due ha ascoltato l'altro in un paio di seminari divulgativi, e gli ha fatto sapere di averli apprezzati molto. L'altro ovviamente ne ha dedotto che la persona in questione era molto in gamba e interessante, visti i giudizi così competenti che dava sui seminari ascoltati... Finché un anno ci siamo incontrati in un bar per gli auguri di buon anno. Il discorso è dapprima indugiato sul calcio: quell'anno Genoa e Mantova militavano nella stessa serie. Poi, improvvisamente e forse per la prima volta, uno dei due si è messo a raccontare quel che stava facendo, e cioè la curatela di un numero monografico su Gödel per la Lettera Matematica PRISTEM.
Ci siamo presto accorti che parlare di matematica al bar ci dava una libertà che faticavamo a prenderci in uno studio in dipartimento. È questo l'inizio dei nostri dialoghi, che ci hanno divertito, e costretto a spiegarci e rispiegarci, perché lavorando in settori diversi non è così scontato essere chiari, senza entrare nei dettagli matematici, che al bar sono inopportuni. Poi, siccome da cosa nasce cosa, c'è venuta l'idea di proporre i nostri dialoghi anche in pubblico, e visto che qualcuno ci è pure venuto a sentire e

ha mostrato gradimento, da qui il passo di provare a metterli per iscritto è stato breve.

Avviso per i lettori-ascoltatori: qua e là il discorso scivola verso qualche aspetto tecnico. Non importa, si possono scorrere queste (piccole) parti senza sforzarsi troppo per capirle, se non si ha voglia. In fondo, a volte forse non si capiscono del tutto anche i due che parlano... ma alla fine il senso del discorso si cattura senza difficoltà.

Si ringrazia Géraldine D'Alessandris per i ritratti dei matematici e lo schizzo della stampa di M. C. Escher.

1

Che cosa vuol dire risolvere un gioco

Che cosa rappresenta un gioco per un matematico? E soprattutto, che cosa significa studiare un gioco e cercare di risolverlo? La nozione di equilibrio di un gioco non è semplice, e va adattata a seconda del tipo di giochi considerati.

◇ Gioco è un termine semplice per descrivere un concetto complicato: però posso capirlo. È un modello matematico (cioè puramente astratto) che descrive un'interazione tra più di un soggetto: tutti riconoscono alcune regole che gestiscono l'interazione dall'inizio alla fine (anzi, come tutti i modelli astratti che si rispettano, gettano spesso via l'interazione intermedia e saltano subito alla fine). E poi ci sono le strategie e i risultati. Ma il termine che non capisco è «equilibrio». Uno si immagina che equilibrio voglia dire che tutti sono d'accordo, invece molto spesso non è così. Ci sono equilibri equilibrati ed equilibri totalmente squilibrati... Spero che ci sia una spiegazione almeno storica per l'etimologia del termine equilibrio.

▼ Sei partito in quarta! Vediamo di fare un passo indietro, per arrivare poi all'idea di equilibrio. Tutta la vita si esprime in termini di *relazioni*: la teoria dei giochi pretende di essere «l'approccio matematico» a questo aspetto. La cosa interessante davvero è che agli inizi la teoria è stata inventata per gli umani, anche se Nash, in una delle sue sublimi intuizioni, accenna al fatto che potrebbe essere applicata agli animali. E oggi ne trovi applicazioni davvero impensate, dalla genetica ai computer, tutti intesi come «esseri razionali interagenti».

◇ Stupefacente! E temo che tu mi stia prendendo in giro...

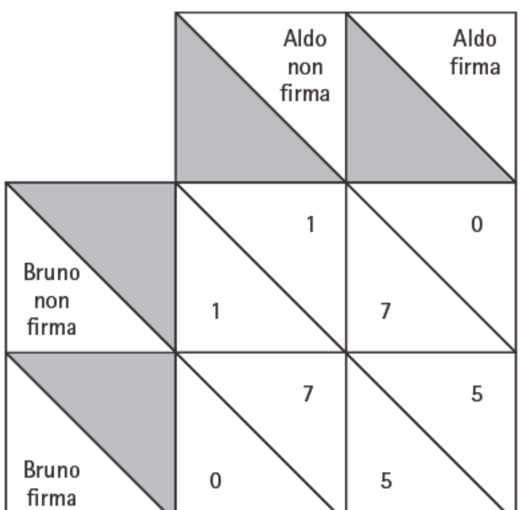
▼ Certo che no. Se ci pensi un attimo, l'idea di razionalità corrisponde al fatto che un organismo, qualunque esso sia, si comporti in maniera efficiente. Da questo punto di vista, ammetti che diventa molto meno paradossale ipotizzare che i batteri, tanto per fare un esempio, si comportino in maniera razionale. Da qui ai computer il passo non è poi così drammatico.

◇ Forse posso essere disposto a crederti, ma se mi facessi un esempio...

▼ D'accordo, e anche se non mi sento particolarmente originale, comincio dal dilemma del prigioniero, l'esempio più famoso di tutta la teoria.
◇ Non mi aspettavo altro!
▼ La storiella racconta che un giudice convoca due arrestati con il sospetto di aver commesso un crimine e fa loro il seguente ragionamento:

> So che avete commesso la rapina di cui siete accusati. Tuttavia, se nessuno dei due confessa, non vi porto in tribunale perché le prove che ho non sono sufficienti per condannarvi. Quindi vi do un anno di galera, per un altro motivo che trovo di sicuro. Se uno dei due mi firma una dichiarazione di colpevolezza di entrambi, e l'altro no, condanno chi non confessa a sette anni di galera, mentre il pentito sarà libero. Se entrambi confessate, vi do i cinque anni previsti dalla legge.

Per tua comodità, ti rappresento la situazione in una tabella (chiamata bimatrice), che se hai una penna decente potrei scriverti sul tovagliolo.
◇ No, aspetta! Scrivo io un diagramma come me lo immagino perché bimatrice è un nome che mi fa paura.



Ciascuno dei due arrestati ha soltanto due possibilità, il risultato prodotto da ognuna di queste dipende pesantemente dalla scelta dell'altro. E uno non sa che cosa fa l'altro. Storiella suggestiva, ma perché è così famosa?
▼ Di solito si usano Alice e Bob, ma va bene anche Aldo e Bruno. Comunque, mi chiedi perché è così famoso? I matematici, come sai, sono geni. O, per meglio dire, la matematica è geniale! La forza della matematica sta proprio nel fatto che usa un modello, un bel modello, per spiegare un sacco di situazioni apparentemente lontanissime... nel nostro dipartimento,

dove sono sviluppate forti competenze in fluidodinamica, ci si occupa di barche, costumi, inquinamento di lagune, giacimenti petroliferi, circolazione sanguigna, aneurismi: ovviamente tutte cose molto diverse, ma con una radice comune.

◇ Che cosa c'entra l'inquinamento con il dilemma del prigioniero?

▼ Niente, almeno per me, ma non mi lasci finire... stavo dicendo che il dilemma del prigioniero è un'esemplificazione, assolutamente geniale, di un fatto che accompagna la vita degli esseri viventi praticamente in ogni momento: il dilemma tra una scelta che individualmente è la più conveniente ma che, combinata con le scelte degli altri, provoca un risultato disastroso per tutti.

◇ Ti interrompo! Avevo letto e capito il problema, ora le tue spiegazioni mi hanno del tutto confuso...

▼ Hai ragione, mi spiego meglio. Ai due la scelta più conveniente è *comunque* di confessare, *qualunque* scelta faccia l'altro. Ma confessando entrambi si fanno cinque anni di galera, se tenessero entrambi la bocca chiusa se ne farebbero solo uno. Il che significa che la scelta ottimale di ogni giocatore *non* dipende dalle scelte dell'altro. Caso raro, come ti puoi immaginare. Eppure, anche in questa situazione semplice, guarda che viene fuori!

◇ Ora va meglio. Ma non ho ancora chiaro perché, in che modo e cosa, gli animali confessano.

▼ Io non ti rispondo, ma ti invito, se vuoi davvero saperne di più, ad andare su Internet e cercare esempi di dilemma applicato agli animali. Per darti un aiuto, ti dico «spinarello». O anche «pipistrello vampiro». Se invece preferisci pensare agli umani, con un po' di fantasia ti accorgi che ogni giorno giochiamo il dilemma del prigioniero, perché scelte che sappiamo essere efficienti collettivamente cozzano poi con il tuo interesse particolare: altrimenti, per esempio, non esisterebbero evasori fiscali, faresti meno code in autostrada, le prigioni sarebbero vuote...

◇ Ma è bellissimo, ora capisco che cosa volevi dire: il dilemma del prigioniero riduce in termini essenziali il problema costante e continuo di quello che si dice «tenere un comportamento socialmente accettabile». Ma torniamo all'idea di equilibrio?

▼ D'accordo. Ti dico come la vedo io, ma non credo che lo direi a lezione, o davanti a un collega...

◇ Io che cosa sono?

▼ Né tantomeno lo scriverei. Bisogna partire dalla domanda: che cosa significa comportamento razionale? La cosa è abbastanza chiara quando devo decidere da solo. Il primo passo consiste nell'ordinare, secondo le mie preferenze e in maniera coerente, le alternative che ho davanti, per poi scegliere la migliore.

◇ Piano, piano, che cosa significa «in maniera coerente»? Per esempio, che preferisco, come diceva Catalano, una moglie ricca, bella e intelligente a una brutta, povera e stupida?
▼ Proprio per niente! I matematici sono tolleranti, da questo punto di vista, ti lasciano definire in assoluta libertà le qualità rilevanti di una moglie o un marito. Però poi da te pretendono coerenza, nel senso che non devi contraddirti: se mi dici che preferisci guardare un film piuttosto che una partita, e uscire di casa piuttosto che guardare un film, non puoi poi pretendere che io creda che tu preferisca vedere la partita piuttosto che uscire di casa...
◇ Insomma, non puoi dire che le preferenze devono soddisfare la proprietà transitiva?
▼ Hai ragione, è proprio così, però che pesantezza formale! Dunque, abbiamo fatto un primo passo, anzi in realtà due. Infatti assumiamo: uno, che una persona sappia ordinare le varie alternative (cosa che non è sempre vera, pensa come spesso uno si tortura per decidere che auto preferisce...), due, che le sue preferenze siano coerenti. Questo rappresenta, secondo me, il primo livello di razionalità ipotizzato dalla teoria. A questo punto, se sono solo a decidere, il passo successivo, dal punto di vista matematico, è assolutamente banale: il comportamento razionale prescrive che tu scelga l'alternativa a te più favorevole, secondo le tue preferenze: questo lo chiamo «equilibrio».
◇ Finalmente, ci hai messo mezz'ora ad arrivare a quello che ti ho chiesto! Allora, che cosa è un equilibrio nella teoria dei giochi? Sembra essere *l'insieme dei comportamenti razionali* dei giocatori.
▼ Se ci ho messo mezz'ora è perché le cose non sono affatto così semplici. Non farti ingannare dal dilemma del prigioniero dove, seppure quasi paradossale, la soluzione emerge in maniera molto semplice. In realtà, la presenza di più individui interagenti rende il problema un guazzabuglio micidiale... e qui si scatena la teoria. In un certo senso, il problema sta nel fatto che la mia razionalità, se posso esprimermi così, non dipende solo dal mio comportamento, ma anche da quello degli altri. Parlando per paradossi, la teoria dei giochi, almeno nei suoi aspetti storici, può essere raccontata, come in effetti faccio a lezione, come una *definizione* dell'idea di razionalità.
◇ Forse ho bisogno di qualche esempio, sia pure a livello elementare, di razionalità in ambiente interattivo, altrimenti mi perdo.
▼ Un primo paradigma di razionalità te l'ho già fatto vedere, e devi ammettere con me che è sciocccante. Razionale è preferire l'alternativa A alla B, se con A otteniamo di più che con B, *qualunque cosa facciano gli altri*. Si dice che B è dominata da A, e razionalità impone che non si usi una strategia dominata. Nel dilemma, non confessare è strategia dominata. Con i risultati che vedi...

◇ Allora fammi un esempio più convincente...
▼ Te ne faccio due, per farti vedere come possa essere messo in evidenza il comportamento razionale. Il primo è talmente semplice che magari ti offendi. Eccolo. Ci sono due mazzetti di carte, uno ne contiene tre l'altro due. Se ne possono togliere quanti se ne vuole da un mazzetto, o lo stesso numero da entrambi. Che pulisce il tavolo vince. Chi vuoi essere, il primo o il secondo a tirare? Ti lascio un minuto per rispondere.
◇ Voglio essere il primo!
▼ Bravo, ti piace vincere. Infatti, togli due carte dal mazzetto che ne ha tre, vero?
◇ Proprio così, e ti lascio con un mazzetto che ha due carte e l'altro che ne ha una. Adesso tocca a te.
▼ Siamo d'accordo, mi ritiro, ma sono contento lo stesso, perché hai intuito che cosa sia l'equilibrio in questo caso: l'unico esito possibile del gioco tra due persone che ci mettono un po' di testa...
◇ Che straordinaria definizione matematica! E l'altro esempio?
▼ Eccolo, guarda questa tabella. Dobbiamo scegliere contemporaneamente: io una riga, tu una colonna. All'incrocio delle nostre scelte, il numero dice quanto tu mi pagherai. Sapresti dirmi che succede?

6	-2	7
4	3	9
9	0	-12

◇ A prima vista direi che non mi proponi un gioco equo: hai messo qualche numero negativo, il che significa che in qualche caso saresti tu a pagare me, ma l'impressione è che sarò io a pagare te...
▼ Giusto, ma quanto?
◇ A occhio non saprei... sarà la birra.
▼ Non ti preoccupare, non è la birra. E non arrabbiarti quando ti faccio vedere la soluzione. In teoria dei giochi succede spesso che non vedi una cosa, ma quando poi te la dicono risulta ovvia! Allora, ecco un suggerimento. Se io giocassi la prima riga, che faresti tu?
◇ Gioco la seconda colonna, così tu mi paghi 2.
▼ Esatto, così come otterrei 3 dalla seconda riga e dovrei pagare a te 12 se giocassi la terza (e tu lo sapessi). Dunque, vedo bene che sono in grado di ottenere almeno tre, giocando la seconda riga.
◇ Aspetta un secondo, credo di aver capito: intanto mi disegno la matrice come una bimatrice fatta come il dilemma del prigioniero, che ci capisco meglio.

	scelta col. 1	scelta col. 2	scelta col. 3
scelta riga 1	-6 / 6	2 / -2	-7 / 7
scelta riga 2	-4 / 4	-3 / 3	-9 / 9
scelta riga 3	-9 / 9	0 / 0	12 / -12

Ora faccio il tuo stesso ragionamento, ma con i segni invertiti: se gioco la prima colonna rischio di pagare 9, se la seconda 3, se la terza di nuovo 9, quindi giocherei la seconda...

▼ Perfetto, ti accorgi che hai trovato la soluzione del gioco? Supponiamo che ci sia una persona che ci propone una transazione tra noi, a patto che non giochiamo: io accetto solo se mi viene dato non meno di 3, tu rifiuti di pagare una cifra non inferiore a 3: sembra uno scioglilingua, invece è evidente che anche senza la presenza di qualcuno che ci guidi ci accorderemo sul fatto che tu mi darai 3, che è evidentemente il risultato del gioco. Altrettanto importante è specificare come si ottiene, perché si tratta di specificare le strategie di equilibrio, che in questo caso si chiamano di *maxmin* per me, di *minmax* per te.

◇ Va bene, ora le cose cominciano a chiarirsi, si tratta di trovare la maniera giusta di analizzare il gioco, e fatto questo si formalizza l'idea di soluzione, e tutto è concluso. L'equilibrio di un gioco è il risultato dei comportamenti dei soggetti egoisticamente razionali, cioè è la composizione degli equilibri (interiori) dei vari giocatori. Però scusa, così il divertimento è abolito: mi hai fatto un po' di esempi, e la conclusione è che giocare è inutile, perché il risultato del gioco è predeterminato – a patto che i giocatori non siano degli inetti – per di più ho l'impressione che il matematico qui stia dando il meglio e il peggio di sé: soluzioni chiare, eleganti, inutili. Perché ammetterai che nella vita di tutti i giorni anche le persone razionali non sanno che pesci pigliare, e amano giocare, perché non è così scontato chi vince.

▼ Aspetta un momento. Prima di tutto, la teoria necessita sempre di ipotesi, e questo ovviamente ne limita l'applicabilità, ti pare? E poi gli esempi fatti sono semplici, da un certo punto di vista troppo semplici. La situazione si può complicare... ma prima di tutto due parole su quanto già visto. Nel gioco dei due mazzetti di carte il metodo per trovarne l'esito si chiama induzione a ritroso. Significa che tu ti disegni un grafo, con tutte le mosse possibili, e poi parti dalla fine per scoprire come va a finire. Ne riparleremo sicuramente, intanto però memorizza le caratteristiche fondamentali di questo gioco: prima di tutto i giocatori giocano in successione, non contemporaneamente, poi deve finire in un numero finito di mosse e in ogni istante i giocatori devono sapere che cosa è successo prima e le possibili evoluzioni: non devono, per esempio, esserci mosse non viste da un giocatore, oppure informazioni note a qualcuno e non note a qualcun altro.

◇ Chiaro, ora capisco che il primo gioco è di tipo particolare, e che questi giochi sono totalmente banali per persone razionali, quindi inutili da giocare. Puoi dirmi qualcosa di più interessante?

▼ Aspetta, corri sempre! Ecco un gioco famoso: vengo da te e ti dico che ho due quadri preziosi, e che te li do, a un patto, che tu faccia un'offerta a Renzo, gliene puoi offrire zero come uno o due. Se lui accetta allora tutto è a posto, ma se non accetta, come non detto, mi tengo tutto io. Che farai?

◇ Non sono sicuro di aver capito: Renzo sa che la sua scelta determina il mio risultato? Se lo sa, mi sembra che ci siano due situazioni, ognuna inaccettabile per uno dei giocatori: quella dove io non tengo nessun quadro e quella dove lui non riceve nessun quadro. Dato che comprendiamo entrambi che ciascuna di queste non è accettabile dall'altro, dobbiamo riconoscere che rimane solo una soluzione.

▼ Scusa ma i tuoi ragionamenti, anche se non del tutto infondati, non c'entrano granché con l'approccio matematico alla teoria dei giochi. Intanto, ovviamente Renzo sa che la sua decisione influenza il mio risultato, altrimenti non saremmo di fronte a un'interazione. Se invece applichi quanto visto prima, dovresti renderti conto che ci troviamo di fronte a due soluzioni possibili. Offri un quadro a Renzo, che accetta perché se rifiuta non ne ha neanche uno.

◇ Ma potrei anche offrirne zero. Lui potrebbe accettare, tanto ottiene zero sia che accetti sia che dica di no! Non possiamo ignorare tale possibilità.

▼ Proprio così. Osserva come la situazione sia differente dal caso in cui tu debba decidere da solo. Quando sei solo non ti torturi per scegliere una delle alternative ottimali: per definizione ti danno tutte la stessa soddisfazione (massima). Qui è tutto diverso. Però scusa, mi rendo conto ora che ho lasciato cadere uno spunto importante che mi hai dato un attimo fa. Lo riprendo ora. Voglio rispondere alla tua considerazione che la teoria ci distrugge il divertimento di giocare, visto che prevede l'esito dei giochi. Intanto, lasciami dire che naturalmente questo accade solo in casi semplici; come vedremo, in altri casi la teoria pur dicendoti cose importanti, lascia spazio a una certa casualità. Ma il punto è un altro: è proprio lo scopo della teoria, di ogni teoria, studiare i fenomeni per prevederne le evoluzioni. Non scappa a questo compito la teoria dei giochi, ovviamente. C'è poi tutto il discorso, nel quale però non mi avventuro, relativo al fatto che la teoria è divertente in quanto ci fa vedere, spesso, come i nostri comportamenti si allontanino dalla razionalità. Da questo punto di vista, fissa un paradigma e poi noi vediamo quanto ci scostiamo da questo. In fondo, se ti invito a giocare al tris è per vedere se sei attento, o sveglio, o furbo.

◇ Mi hai abbastanza convinto, ma mentre parlavi mi è venuta in mente una cosa, che mi sembra rappresenti un problema molto più serio. Gli scacchi non sono un gioco della stessa natura di quello dei due mazzetti?

▼ Eh già!

◇ Quindi tu sostieni che due persone razionali non giocano a scacchi perché tanto il gioco finisce sempre alla stessa maniera..., è proprio questo che vuoi sostenere?

▼ Non voglio risponderti, se non che hai ragione, gli scacchi sono un gioco finito, a mosse successive, tutto sotto gli occhi dei giocatori.

◇ Allora è vero, tu sai giocare la partita perfetta.

▼ No, affatto, anche se mi onori a ritenermi esperto della teoria. Lasciamo perdere questo tema, troppo interessante e lungo per parlarne adesso. Magari il discorso verrà fuori quando parleremo di Gödel, ricordati che me lo hai promesso, anche se forse in quel caso invece che bere una birra potremmo mangiare una sachertorte...

◇ D'accordo, ma che mi dici allora dei giochi in cui, per esempio, avvengono mosse contemporanee, e quindi non posso fare il disegnino come in quelli a mosse consecutive?

▼ Ne hai già visto un esempio, la matrice di sopra.

◇ Vuoi dire allora che calcolando i valori di minmax e maxmin risolvo anche tutti i giochi a mosse contemporanee?

▼ Aspetta un attimo, quello di prima è un gioco a somma zero. Cioè, o io pago te o tu paghi me. Non tutti i giochi sono così: per esempio, il dilemma del prigioniero non rientra in questa categoria. I più intriganti non sono a somma zero. Questi sono i più semplici, e hanno, ha detto qualcuno, la stessa funzione dei gas perfetti in Fisica. Un utile punto di partenza per costruire teorie più complesse.

Comunque, guarda un po' la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sai dirmi quale è l'esito di questo gioco?

◇ Vedo che si tratta di un gioco a somma zero a scelte contemporanee come quello di prima. Però che pasticcio! Mi sembra che il maxmin sia – 1, il minmax 1, la matrice di prima era più semplice...

▼ Appunto, ecco il problema. Se i due valori non coincidono, l'esito del gioco non è scontato. Detto in parole povere, la differenza tra i due valori è qualcosa che i giocatori vorrebbero per sé, ma a chi andrà?

Nota che la matrice rappresenta la morra cinese, in cui il sasso vince sulla forbice, che vince sulla carta, che vince sul sasso... Scritta come bimatrice, come piace a te, viene così:

	sasso	forbici	carta
sasso	0 / 0	1 / –1	–1 / 1
forbici	–1 / 1	0 / 0	1 / –1
carta	1 / –1	–1 / 1	0 / 0

◇ Bene, posso tirare un sospiro di sollievo, mi avrebbe dato molto fastidio pensare che per qualcuno un tale gioco ha equilibrio..., come diresti tu, che sarebbe inutile giocarci.

▼ Hai sospirato troppo presto! Qualcuno, cui ti sarà difficile opporti, ha