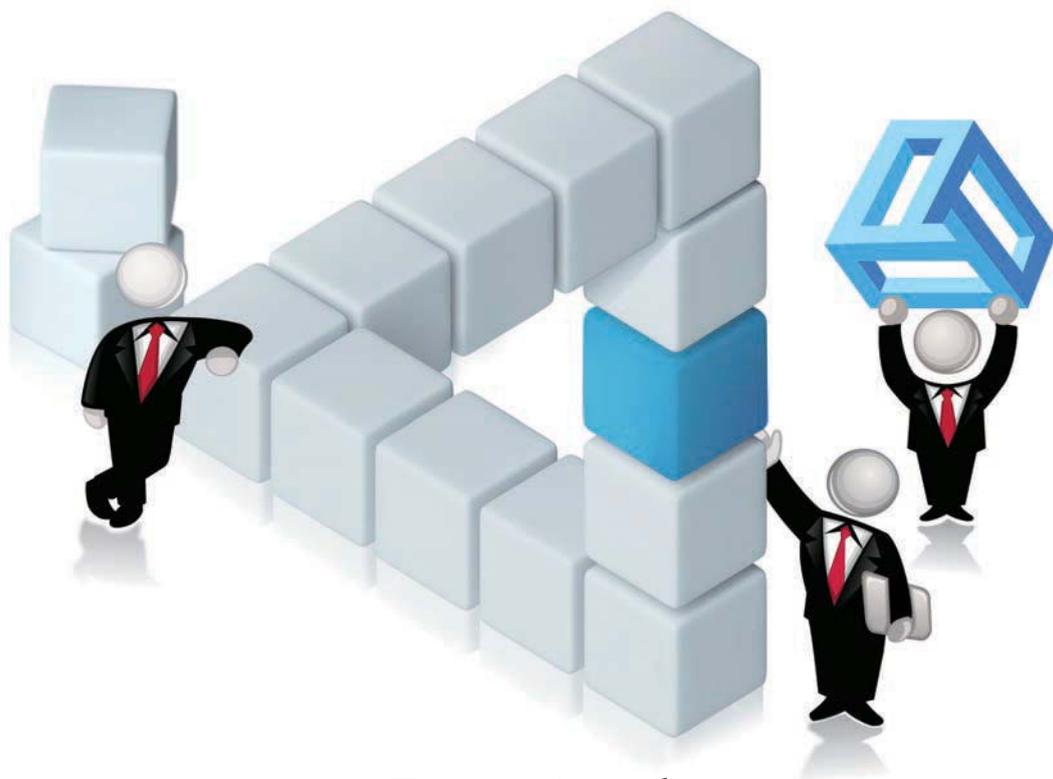


FABIO CIUFFOLI

# Giochi matematici e logici

Esercizi e problemi per prepararsi a test  
e concorsi e per allenare la mente  
divertendosi con il visual problem solving



FrancoAngeli

## Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con



La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta [cliccando qui](#) le nostre F.A.Q.



# Trend

*Le guide in un mondo che cambia*

In testi agili, di noti esperti, le conoscenze indispensabili nella società di domani.

---

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it) e iscriversi nella home page al servizio "Informatemi" per ricevere via e.mail le segnalazioni delle novità.

**FABIO CIUFFOLI**

# **Giochi matematici e logici**

**Esercizi e problemi per prepararsi a test  
e concorsi e per allenare la mente  
divertendosi con il visual problem solving**

**FrancoAngeli**

Copyright © 2015 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy.

*L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito [www.francoangeli.it](http://www.francoangeli.it).*

*Quando i teoremi sono difficili bisognerebbe insegnarli  
inizialmente come esercizi di disegno geometrico  
finché la figura è diventata del tutto familiare;  
allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici...  
facilmente verificabili mediante semplici disegni...*  
(B. Russell, *Misticismo e logica*, 1917)



---

# Indice

<b>Presentazione</b> , di <i>Ennio Peres</i>	pag. 11
<b>Introduzione</b>	» 15
<b>Premessa</b>	» 17
<b>Ringraziamenti</b>	» 19
<b>1. Vedere la soluzione dei problemi</b>	» 21
1. La somma della serie dei numeri interi da 1 a $n$	» 21
2. La somma della serie dei numeri interi dispari da 1 a $n$	» 24
3. Le relazioni tra numeri triangolari e numeri quadrati	» 25
4. La somma di numeri successivi	» 27
5. Il Teorema di Pitagora	» 28
6. La determinazione di $\pi$ greco e il calcolo dell'area di un cerchio	» 30
7. Il calcolo del quadrato di un binomio	» 35
<b>2. Campionati, tronchi e specchi</b>	» 36
Soluzioni	» 38
<b>3. Pavimenti, torri e lunule</b>	» 42
Soluzioni	» 45

<b>4. Frecce, bersagli e scacchiere</b>	pag. 49
Soluzioni	» 51
<b>5. Monete, dadi e sfide</b>	» 59
Soluzioni	» 60
<b>6. Fiere, classi e monete truccate</b>	» 65
Soluzioni	» 66
<b>7. Infermieri, militari e test d'ingresso</b>	» 70
Soluzioni	» 71
<b>8. Scatole, feste da ballo e filosofi</b>	» 75
Soluzioni	» 77
<b>9. Corse, pendolari e fan club</b>	» 80
Soluzioni	» 82
<b>10. Lorenzo, Andrea e Sara</b>	» 85
Soluzioni	» 87
<b>11. Studenti, ministeri ed educatori</b>	» 89
Soluzioni	» 91
<b>12. Pensionati, famiglie e malattie</b>	» 94
Soluzioni	» 96
<b>13. Papiri, tiranni e Nabab</b>	» 101
Soluzioni	» 102
<b>14. Colleghi, cavalli e agricoltori</b>	» 106
Soluzioni	» 107
<b>15. Divisioni, amiche e caporali</b>	» 113
Soluzioni	» 114
<b>16. Mercanti, padri e triangoli</b>	» 118
Soluzioni	» 119
<b>17. Strade, staccionate e vasche</b>	» 123
Soluzioni	» 124
<b>18. Case, alunni e Cranni</b>	» 128
Soluzioni	» 129

<b>19. Pitture, trapunte e collane</b>	pag. 133
Soluzioni	» 135
<b>20. Negozi, tasse e alberghi</b>	» 140
Soluzioni	» 144
<b>Bibliografia</b>	» 149

## Appendici

<b>1. Vedere la probabilità</b>	» 155
1. L'unione di eventi	» 155
2. La congiunzione di eventi	» 156
3. Il complemento di un evento	» 159
Esercizi	» 161
Soluzioni	» 163
<b>2. Vedere le condizioni necessarie e sufficienti</b>	» 166
1. Condizione necessaria	» 167
2. Condizione sufficiente	» 168
3. Condizione necessaria e sufficiente	» 170
4. Relazione tra condizione sufficiente e condizione necessaria	» 171



---

# Presentazione

di Ennio Peres

Nel chiedermi di scrivere queste brevi righe, Fabio Ciuffoli ha dichiarato di essersi formato leggendo i miei libri e di considerarmi, quindi, uno dei suoi maestri. Non so se questa affermazione è totalmente sincera o se è dettata dal desiderio di compiacermi. Nella prima ipotesi, comunque, analizzando il lavoro da lui svolto, ritengo che ci troviamo di fronte al proverbiale caso dell'allievo che supera il maestro...

Sono, infatti, notevoli la quantità del materiale raccolto e la qualità della sua esposizione, sempre chiara, dettagliata e funzionale. La sua opera offre una ricca raccolta di stimolanti e divertenti problemi logico-matematici, molto indicata per tenere allenata la mente, ma anche per affrontare test e prove di selezione per l'università e il lavoro. Una vera e propria palestra per la mente, nella quale esercitarsi per migliorare le proprie abilità intellettive, in modo graduale, utile e costruttivo.

Fabio Ciuffoli svolge attività di progettazione, consulenza e realizzazione nel campo della formazione per le discipline aziendali, ma è anche (e soprattutto...) un insegnante di discipline economiche e turistiche presso la scuola superiore. Di conseguenza, è molto attento alle potenzialità didattiche del gioco. E su tale posizione, può vantare diversi illustri predecessori.

Tra gli altri, l'insigne matematico e pedagogista Lucio Lombardo Radice era un convinto assertore della valenza del gioco come strumento di motivazione allo studio della matematica.

A tale riguardo, al termine del suo libro *Il giocattolo più grande* (ovvero, il cervello, secondo una felice definizione di Charlie Chaplin), pone il

seguinte quesito: “Domanda (molto seria, vi prego di credere, cari colleghi insegnanti): ma perché qualche volta, per controllare quello che i vostri allievi hanno imparato, non fate in classe un’ora di palestra di giochi intelligenti, invece di interrogare? [...] Giocare bene significa avere gusto per la precisione, amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggi non verbali; significa acquisire insieme intuizione e razionalità, abitudine alla lealtà e alla collaborazione”.

In particolare, nell’insegnamento della matematica, il ricorso a delle proposte ludiche consente di affrontare in maniera piacevole la soluzione di problemi di varia complessità. Il gioco, infatti, costituisce un formidabile mezzo di comunicazione (il più naturale e spontaneo per l’essere umano) e, in quanto tale, rappresenta un potenziale strumento didattico di grande efficacia. Già circa 2.400 anni fa Platone (*La Repubblica*, VII, 536 e 537) sosteneva: “Nessuna disciplina imposta a forza può rimanere durevole nell’anima [...]. Quindi [...] non educare i fanciulli nelle varie discipline ricorrendo alla forza, ma per gioco, affinché tu possa anche meglio osservare quale sia la naturale disposizione di ciascuno”.

In tempi più recenti, il grande divulgatore scientifico, Martin Gardner, ha dichiarato:

Un insegnante di matematica, indipendentemente da quanto ami la sua materia e da quanto vigore metta nel suo desiderio di comunicarla, deve sempre affrontare una difficoltà soverchiante: come tenere svegli gli studenti. Mi è sempre sembrato che il modo migliore per rendere interessante la Matematica agli studenti e ai profani sia quello di accostarvisi con uno spirito giocoso. Sta di fatto che il miglior modo di tener sveglio uno studente è presentargli giochi matematici interessanti, enigmi, trucchi, battute, paradossi, modelli, limerick o una qualsiasi delle centinaia di cose che molti insegnanti tendono a evitare perché paiono loro frivole [...] Nessuno dice che un insegnante non debba fare altro che divertire i propri studenti. Deve esserci un interscambio tra serietà e divertimento: quest’ultimo tiene desto l’interesse, mentre la serietà giustifica il divertimento.

A tale proposito, è bene precisare che un’attività di gioco non è individuata dal tipo di azioni che si compiono, ma dalle condizioni sotto le quali vengono svolte.

Per esempio, se ci costringessero a correre, avanti e indietro, per più di un’ora, all’interno di uno spazio limitato, giudicheremmo crudele e massacrante una simile imposizione.

Tante persone di varia età, in tutto il mondo (compresi noi...), però, si divertono molto a svolgere un esercizio del genere, quando decidono di disputare una... partita a pallone.

Oggettivamente, è più divertente “giocare”, piuttosto che “studiare” o “lavorare”, perché è un’attività che viene svolta con piacere e senza costrizioni. Ma anche lo studio e il lavoro possono apparirci meno impegnativi, se riusciamo ad affrontarli come un gioco. In fondo, la differenza tra queste occupazioni, dipende solo dallo spirito con cui le viviamo.

Per esempio, una particolare sequenza di calcoli possiamo eseguirla:

- per studio, se stiamo effettuando un compito in classe;
- per lavoro, se stiamo compilando una fattura aziendale;
- per gioco, se stiamo cercando di risolvere un enigma matematico.

A mio avviso, è importante sottolineare che la maggior parte dei problemi proposti da Fabio Ciuffoli attiva la logica abduttiva, un tipo di ragionamento, introdotto per la prima volta da Aristotele, ma che è stato rivalutato solo verso la fine dell’Ottocento, dal filosofo statunitense Charles Sanders Peirce. Per più di due millenni, questo tipo di logica non è stato oggetto di studi specifici, essendo stato considerato erroneamente un caso particolare dell’induzione.

L’abduzione, in pratica, consente di risalire a una data situazione incognita, dalla quale, nel rispetto di una nota legge, è stato raggiunto un risultato noto. Quindi, può essere interpretata come una sorta di indagine, tesa a risalire alle cause che hanno generato un determinato effetto. Per questo motivo, è la forma di logica tipica, sia del medico che cerca di individuare una malattia, analizzando i sintomi che questa ha generato, sia dell’investigatore che cerca di ricavare elementi utili a scoprire il responsabile di un delitto, analizzando le tracce che questo ha lasciato.

L’abduzione è la forma di logica che ci capita di utilizzare più spesso nella vita di tutti i giorni, spesso inconsapevolmente, secondo Charles Sanders Peirce, è la sola forma di ragionamento in grado di accrescere il nostro sapere. Questo tipo di attività mentale è essenziale per riuscire a conoscere il mondo che ci circonda.

La logica abduttiva, tra l’altro, è alla base delle teorie sulla creatività elaborate dallo psicologo maltese Edward de Bono che definisce *pensiero laterale* quella particolare modalità di risoluzione dei problemi logici che si basa sull’osservazione della questione da analizzare, da diverse possibili angolazioni, in contrapposizione a una procedura impostata, invece, su una successione di passi prestabiliti, già collaudata (definita *pensiero sequenziale*). A suo avviso, il pensiero laterale è: “il modo più creativo per servirsi della mente”.

E qui mi fermo... Non vorrei dare l’impressione di essere un maestro che vuole superare il proprio allievo.



---

# Introduzione

*Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta.*  
(G.H. Hardy, 1877-1947, *A Mathematician's Apology*, 1940)

## La mano della principessa

Una nota serie di cartoni animati racconta la storia di una principessa la cui mano è contesa da un gran numero di pretendenti. Costoro devono conquistarla facendola sorridere. Nei vari episodi si mostrano i molteplici e sorprendenti tentativi di seduzione che ognuno di loro mette in campo.

Così, facendo ricorso a diversi stratagemmi, alcuni più semplici e altri fantasiosi, i pretendenti sfilano uno dopo l'altro senza riuscire neppure a sfiorare le corde del cuore della principessa. Ricordo, per esempio, uno di loro dare vita a una pioggia di luci e di stelle; un altro effettuare un volo maestoso e invadere lo spazio con i suoi movimenti. Niente! Al termine di ciascun episodio appare il volto della principessa, che non lascia trapelare alcuna emozione. L'episodio che chiude la serie ci regala l'inaspettato finale: in contrasto con le meravigliose offerte di quanti l'hanno preceduto, l'ultimo dei pretendenti estrae con umiltà dal suo mantello un paio di occhiali e li tende alla principessa. Lei li indossa, sorride e gli porge la mano.

La storia è molto affascinante e ciascun episodio racchiude in sé una grande bellezza scenografica. Con il procedere degli episodi e di conseguenza con il crescente scarseggiare di possibili stratagemmi di seduzione, questa principessa insaziabile ci viene in odio. Ma ecco, all'improvviso, saltare fuori il dato che ignoravamo: la principessa non si emozionava davanti alle

meraviglie che le venivano offerte perché non poteva vederle. Il problema, era questo, dunque.

Quello che fa l'ultimo pretendente, già al corrente del fallimento degli altri, è cambiare la prospettiva delle cose. Guardare il problema in un altro modo.

Se voi non sapeste di cosa tratta questo libro, forse in questo momento vi meraviglireste come vi siete meravigliati prima con il finale della storia: parleremo e stiamo parlando di matematica e di giochi matematici! In effetti parlare di matematica non è soltanto dimostrare il teorema di Pitagora: è anche parlare di sentimenti, emozioni e raccontare storie di principesse. Anche nella matematica c'è bellezza! Come disse il poeta Fernando Pessoa (1888-1935): “Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo. Il fatto è che pochissimi se ne accorgono”.

Molte volte mi sono sentito nei panni dei primi spasimanti. Così, sebbene mi sia sempre impegnato per esporre le questioni matematiche più belle, la maggior parte delle volte, devo ammetterlo, i miei infervorati tentativi non hanno ottenuto la risposta sperata.

Questa volta proverò ad avvicinarmi all'umile spasimante dell'ultimo episodio. Sulla matematica, secondo Whitehead (1861-1947) “la creazione più originale dell'ingegno umano”, c'è parecchio da dire. Ecco il perché di questo libro. Solo che oggi preferisco anch'io guardare le cose nell'altro modo e cominciare raccontando una storia di occhialini per vedere la matematica.

(P. Amster, *La matematica como una de las bellas artes*, 2005).

Il testo è stato riadattato.

---

# Premessa

*A chi mai leggerà.  
Se le pagine di questo libro consentono qualche verso /riflessione felice,  
mi perdoni il lettore la scortesia di averle usurpate io, previamente.  
I nostri nulla differiscono di poco; è banale e fortuita la circostanza  
che sia tu il lettore di questi esercizi ed io il loro estensore.*  
(J.L. Borges, *Fervore di Buenos Aires*, 1923)

Il libro *Giochi matematici e logici – Esercizi e problemi per prepararsi a test e concorsi e per allenare la mente divertendosi con il visual problem solving* è composto da venti capitoli e due appendici. In totale sono presentati 168 problemi ed esercizi, con le relative soluzioni, graduati in ordine di difficoltà crescente all'interno di ciascun capitolo tematico.

Il primo capitolo suggerisce una chiave di lettura per tutto il testo. In questo capitolo la visualizzazione viene posta al centro della soluzione dei problemi.

Nel secondo capitolo vengono proposti problemi dalle soluzioni apparentemente incredibili, nei quali la percezione immediata entra in conflitto con la riflessione e il ragionamento.

Il terzo capitolo tratta problemi di geometria visiva antica e moderna. Nel quarto capitolo sono trattati problemi di probabilità geometrica.

Nel quinto e nel sesto capitolo si trovano problemi di calcolo delle probabilità, dalle origini di questa disciplina fino ai giorni nostri. Per risolvere i problemi di questi ultimi due capitoli può essere utile consultare l'Appendice 1, "Vedere la probabilità".

I capitoli 7, 8 e 9 riportano test e problemi di carattere logico generale assegnati, recentemente, nelle prove di selezione per accedere alle università.

Nei capitoli 10 e 11 sono stati inseriti problemi di logica condizionale, che hanno fatto parte delle prove selettive per l'accesso alle università o al lavoro, con frasi del tipo: "se A allora B" e "solo se A allora B" oppure "se e

solo se A allora B”. Per affrontare questi due capitoli è consigliata la lettura dell’Appendice 2, “Vedere le condizioni necessarie e sufficienti”.

Il capitolo 12 riporta problemi di probabilità condizionale risolvibili graficamente con i diagrammi oppure algebricamente con le formule del “Teorema di Bayes”.

I capitoli 13, 14 e 16 sono relativi a problemi di matematica e di logica, opportunamente rielaborati, di origine prevalentemente medievale e rinascimentale.

Il capitolo 17 è stato composto con problemi la cui soluzione viene notevolmente facilitata mediante l’elaborazione visiva. Gli ultimi tre capitoli, 18, 19 e 20, sono stati ispirati dalla nuova generazione di test sul ragionamento logico, sul pensiero critico e sul problem solving per accedere alle università e college inglesi e americani.

Nelle due appendici vengono forniti, in estrema sintesi, gli strumenti base per affrontare problemi elementari e complessi di calcolo delle probabilità e problemi di logica condizionale.

Fabio Ciuffoli devolve una parte dei diritti d’autore all’organismo umanitario Progetto Continenti a favore dei bambini di Angkor – Centro Sangkheum – Cambogia.

Per informazioni [www.progettocontinenti.org](http://www.progettocontinenti.org), [www.sangkheum.org](http://www.sangkheum.org).

---

# Ringraziamenti

Il libro che state leggendo è il frutto di un lavoro collettivo che raccoglie diverse suggestioni, le osservazioni dell'uno, le riflessioni e le risposte di altri e la fatica di tutti. L'idea è nata "sul campo" nel mondo della scuola, nei corsi di formazione dove quotidianamente studenti, insegnanti, operatori professionali, corsisti ed aspiranti dottori si confrontano e discutono di matematica, di logica e di soluzione di problemi. Provo una certa emozione nel vedere un allievo che compie i primi passi nel mondo della matematica applicata, dell'economia e della logica e inizia a disegnare diagrammi, tavole di verità, a sviluppare calcoli di convenienza e di consapevolezza e comincia a ragionare sulle implicazioni condizionali, formula ipotesi, poi le corregge, ne formula di nuove, fino al "trionfo della soluzione"; perciò, mi sento debitore verso le tante persone che hanno partecipato, direttamente e indirettamente, alla costruzione di questo percorso. Al maestro Ennio Peres e ai colleghi Silvia Foschi, Michele Morrone, Maura Plachesi, Antonella Ramunno e Annamaria Verdino che hanno letto e migliorato il testo e inoltre a Valentina Ajola, Alice Amoroso, Nicole Bacchini, Sara Beccari, Emanule Belloni, Cecila Berlino, Rebecca Betti, Francesco Cavalli, Sara Ceccaroni, Andrea Ciubotaru, Vanessa Colocci, Martina Colonnetti, Claudio Conforti, Cristian Conti, Alex Cucina, Chiara Del Bianco, Alice Denti, Giulia De Petra, Maria Di Monte, Ylenia Di Tella, Sara Essadi, Aurora Eusebi, Elena Fabbri, Oreste Febei, Laura Ferrari, Giorgia Funelli, Neomi Fusi, Camilla Fuzzi, Alice Giovagnoli, Giulia Giuliani, Gaia Laserpe, Lidia Lanzoni, Angelica Jang, Nicola Mancini, Sofia Mariani, Alessia Mattei, Manuel Miori,