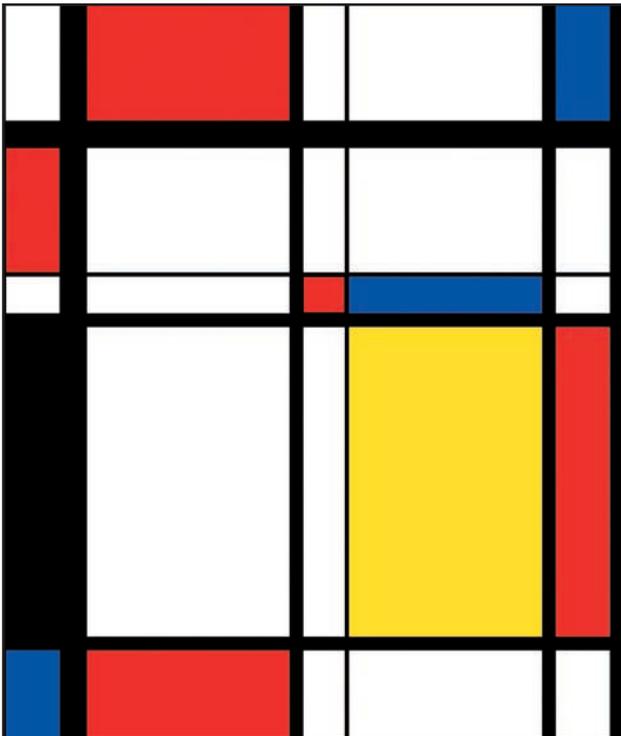


Renato Betti

GEOMETRIA LEGGERA

Introduzione all'idea di spazio matematico

scienza **FA**



FrancoAngeli

Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con



La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta [cliccando qui](#) le nostre F.A.Q.



scienza **FA**

Una collana di saggi per il lettore non specialista:
per comprendere la realtà che ci circonda

Collana diretta da:
Renato Betti, Politecnico di Milano
Roberto Lucchetti, Politecnico di Milano
Giuseppe Rosolini, Università di Genova

Renato Betti

GEOMETRIA LEGGERA

Introduzione all'idea di spazio matematico

scienza **FA**

FrancoAngeli

Progetto grafico di copertina: Geraldine D'Alessandris

1a edizione Copyright © 2015 by FrancoAngeli s.r.l., Milano, Italy

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito www.francoangeli.it.

Indice

Introduzione	pag.	9
1. Conoscere lo spazio. Dalla misura della Terra allo studio delle forme	»	15
1. La nascita della cultura scientifica	»	16
1.1. Talete di Mileto: la forza dell'astrazione	»	20
1.2. Pitagora da Samo: la deduzione	»	24
1.3. I numeri figurati	»	27
1.4. Commensurabilità	»	30
1.5. Zenone da Elea: i paradossi e la dialettica	»	33
2. Il metodo e gli strumenti	»	36
2.1. Euclide di Alessandria: gli <i>Elementi</i>	»	37
2.2. Apollonio da Perga: <i>Le coniche</i>	»	42
2.3. Riga e compasso	»	46
2.4. Algebra geometrica	»	50
2.5. I problemi classici	»	53
2.6. La sezione aurea	»	59
3. Forma e armonia	»	66
3.1. I solidi platonici	»	68
3.2. I teoremi di Napoleone e di Morley	»	71
2. Dominare lo spazio. Dall'intuizione al calcolo	»	75
1. La scuola di Alessandria	»	75
1.1. Archimede di Siracusa	»	77

1.2. Il metodo di esaustione e la quadratura della parabola	pag.	82
1.3. La nascita della trigonometria	»	85
1.4. I teoremi di Menelao e di Ceva	»	89
1.5. Claudio Tolomeo: <i>l'Almagesto</i>	»	90
2. Il principio delle coordinate	»	93
2.1. Cartesio: il <i>Discorso sul metodo</i>	»	96
2.2. Le curve nel piano	»	101
2.3. Galileo: le leggi del moto	»	111
2.4. Contatti di ordine superiore	»	114
3. I problemi locali	»	117
3.1. La retta tangente	»	121
3.2. Applicazioni del calcolo differenziale alla geometria	»	124
3.3. La legge di Snell e il principio di Fermat	»	131
3.4. La curvatura	»	133
4. Le curve dello spazio	»	136
3. Creare lo spazio. Nuovi mondi della geometria	»	138
1. La prospettiva	»	140
1.1. Brunelleschi: la “prospettiva artificiale”	»	143
1.2. Leon Battista Alberti e Piero della Francesca: la “costruzione legittima”	»	144
1.3. Euclide e Tolomeo: <i>l'Ottica</i>	»	148
2. La nascita della geometria proiettiva: Commandino e Guidubaldo dal Monte	»	151
2.1. Keplero: i punti all'infinito	»	154
2.2. Desargues e Pascal: i primi contributi alla geometria proiettiva	»	156
2.3. Il birapporto	»	162
2.4. Monge e Poncelet: i principi della geometria proiettiva	»	166
2.5. Plücker: le coordinate omogenee	»	173
2.6. Il piano complesso e il teorema di Bézout	»	176
3. Gauss: la geometria intrinseca	»	180
3.1. Proiezioni della sfera	»	185
3.2. Riemann: nuovi spazi della geometria	»	189

3.3. Spazi a dimensione superiore	pag.	193
3.4. La formula di Grassmann	»	199
4. I fondamenti	»	201
4.1. Hilbert: <i>I fondamenti della geometria</i>	»	202
4.2. Il convenzionalismo di Poincaré	»	206
4. Trasformare lo spazio. Nuovi principi della geometria	»	208
1. Geometria non euclidea	»	209
1.1. Il problema delle parallele	»	212
1.2. I precursori	»	218
1.3. Bolyai e Lobačevskij: i fondamenti della geometria iperbolica	»	221
1.4. I primi risultati	»	224
1.5. Trigonometria del piano iperbolico: la formula fondamentale	»	228
1.6. Approssimazione euclidea	»	231
1.7. La consistenza della geometria non euclidea	»	232
1.8. Geometria sferica e geometria ellittica	»	233
1.9. Il modello di geometria iperbolica di Beltrami-Klein	»	236
2. Klein: geometria delle trasformazioni	»	240
2.1. Invarianti geometrici	»	244
2.2. I gruppi di trasformazioni lineari	»	248
2.2.1. Geometria metrica	»	249
2.2.2. Geometria delle similitudini	»	250
2.2.3. Geometria affine	»	252
2.2.4. Geometria proiettiva	»	253
2.3. L'inversione circolare	»	255
2.4. Applicazioni dell'inversione circolare	»	260
2.4.1. Il teorema di Tolomeo	»	260
2.4.2. Il problema di Apollonio	»	261
2.4.3. Il dispositivo di Peaucellier	»	263
2.4.4. Il modello di Poincaré	»	264
3. Simmetria nel piano	»	266
3.1. Le isometrie piane	»	270
3.2. I gruppi discreti di simmetria piana	»	274

3.2.1. I gruppi dei rosoni	pag. 274
3.2.2. I gruppi di fregi	» 276
3.2.3. I gruppi dei mosaici	» 279
3.3. Tassellazioni poligonali del piano	» 283
4. Le origini della topologia	» 289
4.1. Classificazione delle superfici	» 293
4.2. I grafi e il teorema dei quattro colori	» 296
4.2.1. I ponti di Königsberg	» 296
4.2.2. La formula del poliedro	» 297
4.2.3. Il problema dei quattro colori	» 299
4.3. La congettura di Poincaré	» 301
Indice dei nomi	» 303

Introduzione

Gli uomini affrontano da sempre il problema di rappresentare i corpi dello spazio. A volte per questioni estetiche o rituali, altre volte per motivi pratici, per esempio per capire la struttura di un fenomeno oppure riprodurre la forma di un oggetto con un manufatto.

Corpo, forma, struttura: le idee di corpo e di forma sono intuitive. Acquisiscono senso quando si desidera riflettere su ciò che chiamiamo “spazio” e allora entrano in relazione fra di loro. L’idea di “struttura” riguarda invece le relazioni interne degli oggetti e dipende largamente da caso a caso.

Che cos’è lo spazio? Una domanda antica alla quale si possono dare molteplici risposte. O nessuna. Fin dall’antichità i problemi relativi alla sua natura riaffiorano nel tempo. Li troviamo nel Rinascimento, poi nel corso dei primi sviluppi della fisica classica, a partire dal XVI secolo, e della fisica relativistica nel XX secolo. Ogni interpretazione si scontra con aspetti di carattere fisico, psicologico, filosofico e anche teologico. È soltanto un’ipotesi. Accanto ad alcune relazioni elementari, accessibili dall’intuizione – stare sopra o sotto, davanti o di dietro, da una parte o dall’altra – la pluralità dei significati presenta contraddizioni insanabili.

Ma, in senso generale, quale idea ne abbiamo? Si racconta che Archita di Taranto – filosofo, politico e matematico pitagorico del IV secolo a.C. – si chiedesse non senza ironia: “Se scaglio una freccia dal bordo dello spazio, dove va a finire”? È omogeneo e isotropo, come si tende a pensare? Quali proprietà eredita dai corpi che

contiene e quali trasmette loro? Fino a che punto è un costrutto del pensiero e quanto un dato reale?

Secondo la fisica classica, lo spazio è una specie di contenitore – lo “spazio assoluto” – *sensorium Dei*, dice Newton, in ogni luogo uguale a se stesso, da sempre esistente e indifferente sia ai corpi che contiene sia alla loro dinamica. Riceve il proprio senso dalla legge galileiana di inerzia.

L'indipendenza dello spazio dalla materia sembra risalire ai primi atomisti – del V e IV secolo a.C., Leucippo e Democrito – la cui teoria popola ciò che esiste di elementi indivisibili e sempre in movimento, gli “atomi”, ai quali corrispondono astrattamente i punti della geometria. Il punto è “ciò che non ha parti”, dice Euclide. E proprio la geometria di Euclide, che studia le figure e i rapporti fra le loro grandezze significative, entra in sintonia con la struttura formale che è accettata dalla fisica classica. La geometria euclidea è la prima cosa che vediamo quando parliamo di spazio.

Ma la storia del pensiero presenta anche un punto di vista che forse è psicologicamente precedente: dapprima vengono i corpi e lo spazio non è altro che il loro “posto” – *topos*, dice Aristotele – una forma di organizzazione della materia dalla quale non risulta affatto indipendente. Nel periodo moderno, questa idea è associata soprattutto ai nomi dello scienziato olandese Christiaan Huygens (1629-1695), di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), il grande filosofo del razionalismo, e del matematico svizzero Johann Heinrich Lambert (1728-1777) – per citarne solo alcuni – per i quali lo spazio è l'apparato concettuale che permette di descrivere le relazioni fra i corpi.

Nella *Encyclopédie* del Settecento, Jean-Baptiste d'Alembert (1717-1783), scienziato e matematico che aderisce alle idee dell'Illuminismo e sostiene che al sapere delle scienze esatte si debba subordinare ogni altra forma di cultura, riconosce fin dall'inizio che “la questione della natura dello spazio... è essenziale per la sua influenza sulle più importanti verità della metafisica”.

D'Alembert riassume le differenze che si sono fissate nel tempo, ma lascia intatti i problemi relativi alla sua natura, alla struttura che gli viene conferita dall'osservazione sensibile e ai suoi rapporti con la materia. Rimane la convinzione che la nozione generale vada

oltre la fisica e la geometria e forse anche oltre la filosofia del senso comune.

Poco più tardi arriva la mediazione, per così dire, del metafisico Immanuel Kant (1724-1802), secondo il quale lo spazio – come anche il tempo – non può essere percepito empiricamente giacché è una forma pura a priori della nostra intuizione. La sua struttura è già dentro di noi e questa è la migliore dimostrazione che l'ordine della natura è un'estensione della ragione umana. Ma la soddisfazione accordata ai razionalisti è temperata dal fatto che, secondo Kant, l'uomo usa le idee di spazio e tempo per dar sostanza alle proprie esperienze: queste nozioni diventano operative – per così dire – solo se vengono “innescate” dai sensi. Sono la condizione che rende possibili le esperienze: e anche gli empiristi vengono accontentati.

La concezione della fisica moderna considera che, più che “posto” occupato dalla materia, lo spazio sia la materia stessa. Gli scienziati del XIX secolo cominciano a pensare che lo spazio non sia necessariamente piatto e inerte, ma un'entità che si può flettere, piegare, incurvare e plasmare. Secondo la teoria della relatività di Einstein, vicino a un campo gravitazionale lo spazio cessa di essere euclideo: Einstein non pensa alla gravità come a un campo di forze che agisce sullo spazio, ma come all'effetto di una variazione della geometria. La sua struttura è allora descritta meglio in termini intrinseci, per mezzo delle concezioni legate a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e a Bernhard Riemann (1826-1866), grandi matematici dell'Ottocento che sono portati dalle proprie ricerche a riflettere sullo statuto della geometria.

In tempi più recenti, il filosofo Nicola Abbagnano sottolinea che l'idea di spazio si può considerare da almeno tre ordini di questioni: relativamente alla sua natura, alla realtà e infine alla struttura. Osserva Abbagnano: “... Una risposta all'ultimo problema [quello della struttura] non è che una geometria e le diverse risposte a esso costituiscono le differenti geometrie”.

Così, in geometria ci accontentiamo di domande relative alla struttura: come si rappresenta la posizione dei corpi, come si formalizza e si studia? Quali idee ci sono fornite dalle nozioni che l'uomo ha sviluppato? Quali sono le proprietà che – kantianamente – forniamo allo spazio con i nostri studi? In questo modo, si di-

rà, la geometria precede la nozione di spazio. Proprio così. E l'attenzione si rivolge alle modalità effettive della sua interpretazione oppure a come lo si può "inventare". Inventare lo spazio – uno spazio adatto al problema da affrontare – o addirittura "crearlo" – è lavoro da matematici. È questa l'idea di "spazio matematico". Per chi pensa a un dato oggettivo, accessibile solo dai sensi, si tratta di accogliere nella formalizzazione della geometria una sorta di ricostruzione concettuale.

E da dove proviene la geometria allora? Anch'essa è il risultato di un lungo percorso. L'uomo primitivo ha scandito i ritmi della propria vita secondo quelli dei corpi celesti e ha voluto intenzionalmente riconoscere nella natura – a partire dalle costellazioni – le immagini della propria quotidianità. Le figure che l'occhio vede nel cielo sono usate per orientarsi ma anche per accostare il nostro vivere di tutti i giorni alle verità superiori, che si immagina abbiano sede lì. Questo è un primo, ingenuo ma grandioso tentativo di interpretare lo spazio, una sua primordiale "conquista", quasi a volerlo colonizzare con confini e recinzioni che l'uomo sa leggere.

Senza questa lettura, lo spazio immenso della volta celeste sarebbe ancora quello che – immaginiamo – è stato per milioni di anni: fonte di stupore e di paura la notte, ma non ricerca del proprio senso prima, e poi fonte di conoscenza.

Oltre la cultura materiale che incorpora negli oggetti le forme del proprio adattamento allo spazio e nei monumenti i sogni e le speranze di eternità, oltre il pensiero mitico – spesso religioso e simbolico – che guarda al proprio ambiente per trovarvi traccia di sé, oltre ancora c'è il pensiero scientifico che, in qualche senso, proietta nello spazio le forme della propria razionalità: questa è la geometria. Da "misura della terra" – secondo la propria etimologia, ricalcolo di estensioni dopo le periodiche alluvioni, dimensionamento delle pietre da costruzione ecc. – la geometria diventa la scienza razionale che studia le forme che percepiamo con i sensi. Questi il suo esordio e i suoi primi contatti con lo spazio.

Così, quella della geometria è, in larga parte, una storia che si presta a essere "romanzata": lo sviluppo di una forma di pensiero che è possibile raccontare come un'avventura, fissata in alcuni esempi caratteristici. È il caso di questo libro: una storia della geometria,

che racconta qualche idea del passato. Una “geometria leggera”, che intende suggerire idee e metodi più che teoremi, esporre punti di vista più che teorie formali o applicazioni.

Il romanzo della geometria affonda le proprie radici nel mondo antico e conduce a poco a poco verso la consapevolezza che lo “spazio ordinario”, quello della nostra esperienza, l’ambiente nel quale ci sentiamo tutti intuitivamente immersi, è solo il punto di partenza. Progressivamente poi, l’idea di spazio matematico prende sostanza e diventa una modalità di esistenza dei corpi, delle forme e dei loro problemi. Della loro struttura. Questo è un invito allo spazio/spazi della geometria.

1

Conoscere lo spazio.

Dalla misura della Terra allo studio delle forme

In origine la geometria è una scienza empirica, basata sull'osservazione e sull'esperienza. Il primo senso si legge direttamente nell'etimologia della parola: "misura della Terra". Eudemo di Rodi, filosofo del IV secolo a.C. all'origine delle prime fonti scritte di storia della scienza, scrive: "La geometria fu scoperta dagli Egizi sulla base delle loro misurazioni del terreno". Questo è stato senz'altro – assicurano gli esperti: storici, antropologi, archeologi... – il suo statuto per un lungo periodo di tempo, durante il quale ha svolto funzioni essenzialmente pratiche: ricalcolo dei confini dopo le periodiche inondazioni del Nilo, misura delle aree per questioni ereditarie, calcolo di distanze, di volumi, del peso di corpi, dell'altezza di monumenti. In questo lungo periodo, la valutazione quantitativa di oggetti che fanno parte della comune esperienza nello "spazio ordinario" – nel quale si vive e si opera – riassume grande parte delle caratteristiche che ne permettono la ricostruzione ideale. La necessità di edificare gli edifici, magari semplici capanne di canne o di fango, contribuisce a rafforzare l'idea dei primi elementi geometrici, quali per esempio quella di "angolo retto", di "cerchio" e di "segmento".

A questo livello è esclusa ogni considerazione di tipo generale o astratto. La nascita della geometria come scienza razionale – per quanto riguarda la cultura occidentale – viene fatta risalire al VII-VI secolo a.C., quando nella Grecia antica comincia a farsi strada la convinzione che una idealizzazione delle forme concrete in termini di figure immateriali consenta un'analisi meno legata ai caratteri specifici degli og-

getti. E questo significa, fra le altre cose, mettersi in grado di ricercare le cause prime dei fenomeni e applicare in modo uniforme e sistematico le regole ottenute. L'astrazione dalle proprietà particolari consente un'indagine più efficace e più estesa, di carattere universale. È una questione di metodo, e si dirà che si tratta del "metodo scientifico".

Al pensiero operativo delle civiltà arcaiche vengono sostituiti il pensiero ideale e la metodologia razionale. Ragione, verità e bellezza cominciano a connotare gli enti matematici, i quali sono astrazioni, idee che albergano nella mente, distinti dagli oggetti fisici e dalle loro rappresentazioni. Dice Platone ne *La Repubblica*:

I geometri si valgono di figure visibili e ragionano su di esse, non a esse pensando ma a quelle di cui sono l'immagine... cercando di vedere attraverso di esse i loro originali, che non sono visibili se non dall'intelligenza idealizzatrice.

Una figura, per quanto tracciata in maniera approssimativa, è altrettanto sensibile di un oggetto materiale – che si può toccare, manipolare, trasformare – e altrettanto intellegibile di un principio logico, sul quale si basano la riflessione e il calcolo. È allo stesso tempo "oggetto di esperienza" e "oggetto di ragione". Una doppia valenza che diventa caratteristica del mondo matematico.

Uno dei maggiori scienziati fra Otto e Novecento, Jules-Henri Poincaré (1854-1912), osserva che "la geometria è la scienza del ragionare corretto su figure scorrette". In questa apparente contraddizione fra l'esigenza dell'argomento rigoroso e del calcolo preciso – fondante per la matematica – e l'uso di figure soltanto abbozzate, si trova un ulteriore senso, profondo, della geometria: per quanto imprecisa, la figura è solo una comoda rappresentazione di forme sulle quali il matematico conduce le considerazioni con altri occhi. Vede oltre ciò che traccia con la mano.

1. La nascita della cultura scientifica

L'atteggiamento dei popoli pre-ellenici nei confronti dei fenomeni naturali viene usualmente connotato come pre-scientifico, forse

perché considera la natura imperscrutabile e minacciosa. L'accettazione degli eventi è legata spesso alla volontà delle divinità, da indurre alla benevolenza con preghiere e atti di magia, e la loro cultura non possiede quella fiducia, che distinguerà il mondo classico, in una sorta di ragionevolezza della natura, di armonia e di convinzione che, nell'apparente eterogeneità dei fatti e nel flusso incessante degli eventi esistano elementi di uniformità e di continuità: la natura possiede criteri che la ragione è in grado di capire. Con questa fiducia, la logica della natura e la logica della mente umana entrano in sintonia.

È noto anche come i popoli pre-ellenici avessero numerose conoscenze, in generale acquisite a partire da semplici generalizzazioni da un caso elementare a un altro un po' più complesso: l'origine di molti risultati, consapevolmente espressi all'interno di un ampio quadro concettuale, è attribuita ai pensatori greci ma, secondo quanto ci racconta Erodoto di Alicarnasso – il primo storico del mondo occidentale, attivo nel V secolo a.C. – si può rintracciare nella pratica di calcolo delle culture più antiche.

Forse per il suo assetto politico maggiormente stabile per un lungo periodo, è la civiltà egiziana che si distingue per ricchezza di conoscenze tecnico-pratiche e per costruzioni di grandi dimensioni e grande precisione – non solo le piramidi ma anche lunghi canali di irrigazione – oltre che per la raffinatezza della rappresentazione artistica, che esibisce numerosi elementi di natura squisitamente geometrica, come ordine, simmetria ed equilibrio: caratteri che collegano la geometria all'armonia delle forme. Il legame con l'estetica comincia presto e fra i problemi di rappresentazione e di struttura corre da subito grande parte della tensione che alimenta la geometria. Nessun documento manifesta tuttavia l'esigenza di una dimostrazione o l'esposizione di un principio, per i quali sarà necessario attendere un'altra civiltà.

Nella scienza, nella filosofia e nell'arte, la cultura greca rivela fin dal proprio periodo antico – a partire dal IX-VIII secolo a.C. – capacità espressive originali che trasformano il complesso di nozioni elaborato dalle civiltà precedenti in un sistema allo stesso tempo più semplice, più generale e più razionale. Come ciò sia avvenuto è poco noto: da una parte i greci ereditano numerose nozioni pratiche,

dall'altra introducono nei procedimenti un nuovo spirito che si manifesta con gusto e intenzione diversi. L'arte è legata a caratteri di armonia compositiva ed equilibrio, la filosofia e la scienza si riferiscono a una specifica sensibilità razionale. Arte e scienza si compenetrano. Fanno parte di uno stesso senso di appartenenza alla natura, del desiderio di cogliere gli aspetti universali nella loro essenza interiore e nel loro aspetto sensibile. Il bello è concepito come una conquista che passa attraverso la conoscenza e la conoscenza è un affare umano. Sempre meno legata alla benevolenza degli dèi, la si raggiunge lentamente, grazie all'osservazione e all'uso dell'intelletto. La convinzione – almeno nelle aspirazioni – è che sia possibile capire ciò che avviene, spiegare i fenomeni in maniera autonoma, libera e universale, distinguere i giudizi effettivi e controllabili da quelli emotivi e tradizionali. La fiducia nelle proprie capacità porta il pensiero verso la comprensione dei fenomeni senza ricorrere all'autorità o alla rivelazione divina.

La civiltà greca si distacca progressivamente dal mito. A Senofane di Colofone, filosofo del VI secolo a.C. si attribuisce un'espressione che raccoglie il nuovo spirito: "Non è che da principio gli dèi abbiano rivelato tutte le cose ai mortali, ma col tempo essi, cercando, ritrovano il meglio".

Con la scoperta del "logos" – ragione presente in tutte le cose – comincia il senso scientifico della ricerca. A questo primo periodo sono legati i personaggi leggendari di Talete di Mileto, di Pitagora da Samo e di altri filosofi della natura, che speculano sull'essenza del mondo e sulla sua origine. Delle loro opere si sa poco e gli autori hanno idee incerte e confuse, ricostruite sulla base di semplici frasi emblematiche attribuite alle loro scuole: "conosci te stesso" nel caso di Talete, e "tutto è numero" in quello di Pitagora.

"La natura ama nascondersi" dirà Eraclito di Efeso, il famoso "filosofo del divenire", fra VI e V secolo a.C. Un'espressione che riflette lo spirito del tempo e la convinzione di tutti i primi pensatori greci: se ama nascondersi, la natura è animata – anche quella che ci appare inerte – ha regole che si possono scoprire ed è implicito che ciò sia possibile con l'uso della ragione. Lei si nasconde... ma noi siamo capaci di trovarla.

Eraclito è considerato uno dei primi assertori del legame fra razionalità della natura e razionalità della mente umana, in un rap-

porto metaforicamente analogo a quello che corre fra l'arco che viene teso dalla propria corda: forse la prima espressione del metodo che sottende il ragionamento. La tensione è volta allo studio razionale della natura.

All'inizio di un noto libro sulla storia della matematica, lo storico Morris Kline osserva che “la matematica è lo sforzo più profondo e incessante fatto dall'uomo per utilizzare la ragione”¹.

Questo atteggiamento ha origine nella Grecia antica. Forse, all'inizio l'uso della ragione si manifesta in antitesi alle espressioni mitiche e irrazionali, come una maniera nuova di guardare le cose. I primi pensatori si occupano di tutti i punti di vista, filosofia e scienza condividono la forma della ragione, sia quando si articola in aspetti specifici sia quando è tesa all'universale, alla totalità delle cose. Ogni conoscenza è ricostruzione di ciò che è percepito nel mondo: la matematica si occupa di individuare e costruire – e talvolta inventare – i concetti, la filosofia li sottopone a esame, ne analizza il senso, il comportamento e i limiti.

È in questo periodo antico che per la geometria si afferma in maniera naturale un nuovo punto di vista, più incorporeo ma non meno preciso di quando era la “misura della Terra”. Accanto alle quantità, che da sempre misurano la consistenza degli oggetti, il concetto di forma, l'intuizione e il ragionamento visivo concorrono al punto di vista che rimarrà in auge per molto tempo e che ancora oggi costituisce un utile riferimento: “La geometria è lo studio delle forme dello spazio nei loro rapporti con le quantità”.

Una relazione che, nel caso più semplice, si riferisce alle figure del piano. L'uso immediato dell'uno o dell'altro dei termini scompare per concentrarsi sulla relazione stessa:

Forme dello spazio \longleftrightarrow Rapporti quantitativi

Da una parte si collocano gli aspetti qualitativi e sintetici, mentre l'altro estremo racchiude quelli quantitativi e analitici. Da

1. M. Kline, *Matematica. La perdita della certezza*, Mondadori, Milano, 1985 (titolo originale: *Mathematics: the Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980).