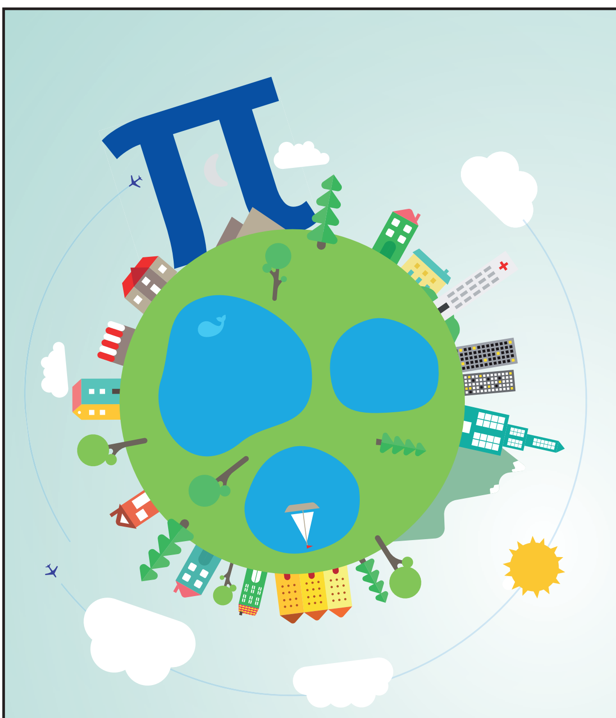
Egidio Battistini

IN VIAGGIO CON π

Il racconto di un numero tra idee matematiche e vicende umane

scienza FA



FrancoAngeli

FrancoAngeli
Edizioni La passione per le conoscenze

Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con Adobe Acrobat Reader

La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta cliccando qui le nostre F.A.Q.

Adobe
Adobe Digital Editions

scienza FA

Una collana di saggi per il lettore non specialista:
per comprendere la realtà che ci circonda

Collana diretta da:
Renato Betti, Politecnico di Milano
Roberto Lucchetti, Politecnico di Milano
Giuseppe Rosolini, Università di Genova

Egidio Battistini

IN VIAGGIO CON π

Il racconto di un numero tra idee matematiche
e vicende umane

scienza **FA**

FrancoAngeli

Progetto grafico di copertina: Géraldine D'Alessandris

1a edizione. Copyright c 2016 by FrancoAngeli srl, Milano, Italy

In copertina un'elaborazione grafica dei ciottoli di Mas d'Azil in Francia, risalenti al Mesolitico. Dipinti con motivi cruciformi, a cerchi, a bande anche serpentiformi o con serie di punti; questi segni pittografici vengono interpretati in vario modo e sono ritenuti uno dei primi esempi di comunicazione simbolica.

L'opera, comprese tutte le sue parti, è tutelata dalla legge sul diritto d'autore. L'Utente nel momento in cui effettua il download dell'opera accetta tutte le condizioni della licenza d'uso dell'opera previste e comunicate sul sito ***www.francoangeli.it.***

A
... Tommaso, Sofia...

Indice

Sequenza

1. Compaiono i numeri interi: π è un intero.

2. Vengono introdotti i numeri razionali: π è razionale.

3. Si prende coscienza che i numeri razionali non bastano per risolvere quesiti geometrici e numerici. Nascita dei numeri irrazionali.

4. Ancora, per poter risolvere equazioni, gli irrazionali non bastano: dopo aver infranto la barriera della razionalità con gli irrazionali, si esce dalla realtà immaginando gli immaginari. Vengono dunque definiti i numeri complessi.

5. In un universo matematico in cui trovano spazio anche gli irrazionali, viene riconosciuta la non razionalità di π.

6. Vengono definiti (rigorosamente) i numeri irrazionali.

7. Si riconosce che i numeri irrazionali non sono costituiti solo da soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi: nascono i numeri trascendenti.

8. Viene riconosciuta la trascendenza di π.

9. Si prende coscienza che gli irrazionali trascendenti costituiscono praticamente la totalità dei numeri reali.

10. Dall'osservazione della regolarità (statistica) con cui le diverse cifre decimali di un numero compaiono in uno sviluppo in una data base, vengono definiti i numeri normali, in una data base, piuttosto che i numeri normali tout court. Quasi tutti i numeri sono normali, ma non se ne conosce un esempio esplicito.

11. π è sospettato di essere normale, ma la sua normalità, anche più semplicemente in una data base, rimane un problema aperto.

12. Il calcolo numerico delle cifre di π passa attraverso interi, razionali, irrazionali e complessi.

Incipit

Il viaggio che ci accingiamo a compiere utilizza il numero π ("3,14") come navicella dalla quale osservare l'emergere della conoscenza nella storia dell'*homo sapiens*. Ma, oltre a essere contenitore (la navicella), π sarà anche contenuto, oggetto che vedremo crescere nella coscienza dell'uomo al crescere della (sua) scienza. Una crescita faticosa, tutt'altro che lineare, come testimonia un grande matematico del XX secolo, Laurent Schwartz.

> I meccanismi mentali della scoperta sono ben diversi da quelli che il pubblico si immagina, e cioè un progresso dall'inizio alla fine attraverso un ragionamento rigoroso, perfettamente lineare, in un ordine ben determinato e unico che corrisponde alla logica perfetta. Il pubblico non conosce le incertezze, ed è un peccato, perché questo rende la matematica e le scienze troppo rigide, meno umane, più inaccessibili, senza alcun diritto all'esitazione e all'errore[1].

Ciò che racconteremo durante questo viaggio potremo immaginarlo tratto dal diario di bordo redatto da un membro dell'equipag-

1. A molti sembrerà strano che sia un matematico a sostenere questo punto di vista, ma la stranezza è un indice della distanza della matematica dal comune sentire. Schwartz ci ha insegnato a "derivare le funzioni non derivabili". Qualunque cosa voglia dire, è un progresso paragonabile alla "risoluzione di equazioni che non possono essere risolte", come per esempio $x^2+1=0$, chiaramente non risolubile finché qualcuno non allarga l'insieme dei numeri disponibili introducendo l'insieme dei numeri complessi.

gio della navicella e non sarà necessariamente riportato seguendo un rigoroso ordine cronologico. Il racconto riguarderà essenzialmente idee matematiche (più o meno) connesse con π. Non aspettiamoci dunque una classica storia della matematica, nemmeno delle sue idee principali. Ci passeranno davanti agli occhi non solo teoremi, ma anche fatti, idee scientifiche e scoperte tecnologiche, nonché eventi la cui eco si sarà fatta sentire anche nel nostro numero-navicella. Potrà anche capitare che eventi importanti non vengano rilevati, vuoi perché in quel momento il navigatore si sarà appisolato, vuoi perché la concomitanza di altri fatti avrà deviato la sua attenzione. Se poi, tangenzialmente, incapperemo anche in questioni di carattere epistemologico o filosofico, o anche religiose, ciò sarà indipendente dalla nostra volontà: le riporteremo come impressioni di viaggio, senza assumercene alcuna responsabilità.

Parte prima.
π, la preistoria

Navigatore

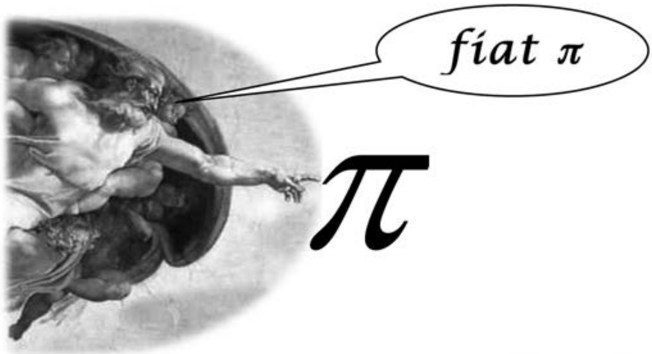
Dopo alcuni tentativi (retorici) di inizio della storia di π, magari criticabili per essere un po' troppo occidentali (ma ci sforzeremo di allargare gli orizzonti), partiremo con **la (le) definizione(i) del numero π**. Tuttavia chiariremo subito che la sua storia non origina con delle definizioni. Come la storia non è già scritta, la logica perfetta non esiste e non esistono ragionamenti rigorosi. Inoltre il progresso, se ha un inizio, non è detto che abbia un(a) fine.
π compare quando si cerca di mettere in relazione la "circolarità" con la "quadrità": non è un'impresa semplice e π è il legame fra questi due mondi.
A meno che per un'adesione a una sorta di "disegno intelligente" non si postuli l'infusione diretta (!) di π (e della matematica) nell'anima/spirito/coscienza da parte del (di un) Creatore, le prime vite di π saranno legate allo stato di conoscenza delle civiltà che ne fanno uso. Partiremo dunque dagli interi, sorvolando (momentaneamente) su come questi oggetti siano emersi alla coscienza. Se tutto ciò di cui si dispone sono i numeri interi, **π nasce intero** (è uguale a 3): così è documentato in epoche e luoghi diversi (**presso cinesi ed ebrei**, per esempio).
Giusto per "confondere i sapienti", dimostreremo però che $\pi = 2$ e anche che $\pi = 4$!
Prenderemo poi atto che nel 2000 a.C. **π rinasce razionale**, per esempio presso gli **egizi**, con $\pi = 256/81$ (= 3,1605) e i **babilonesi**,

dove $\pi = 25/8$ (= 3,125). Tale data, in cui per la prima volta si hanno notizie (ragionevolmente) certe riguardo a π, verrà presa come "anno zero". Vista l'importanza dell'evento per la nostra storia misureremo in tal modo il tempo a partire da lì, consapevoli che come tutti i grandi eventi che si perdono nella notte dei tempi, tale inizio è convenzionale. Conseguentemente, per esempio, il 450 d.C. diventerà 2450 dell'era π, abbreviato in "2450 e.π.", e le prime piramidi egizie potremo datarle dal "VII secolo a.e.π." (*ante* era π).
Nel 450 d.C. (2450 e.π.) secondo **Zu Chongzhi** $\pi = 355/113$, valore che coincide con quello odierno fino alla sesta cifra decimale. Per arrivare a tanto l'Occidente dovrà aspettare più di mille anni.
Vedremo poi che attorno al V secolo a.C. nell'**area greca** vengono formulati problemi quali quello della quadratura del cerchio, della duplicazione del cubo e della trisezione di un angolo, la cui soluzione dovrà attendere anche più di duemila anni. È il riflesso dell'attenzione riservata alla matematica in quest'epoca e in quest'area del pianeta ed è da lì che **prende forma la matematica (così come la conosciamo noi)**, strutturata in assiomi e teoremi.
Passando poi per **Aristotele**, 384-322 a.C., che si sofferma su ogni aspetto dello scibile, divenendo una pietra miliare con cui ogni forma di conoscenza posteriore si dovrà misurare, concluderemo con **Epicuro**: "Se non ci turbassero i misteri dei cieli e il significato della morte e la nostra incapacità di comprendere i confini del desiderio e del dolore, non avremmo alcuna necessità della filosofia della natura". E non staremmo qui a ragionare su π.
Ampliando il nostro orizzonte, noteremo che, nel 300 a.C. i **Maya** introducono lo zero e che, in un'altra area del pianeta, in un testo cinese, scritto tra il 300 a.C. e il 200 d.C., fanno la loro prima apparizione le matrici.
Tornando nell'area greca, assisteremo attorno al III secolo a.C. a un'"esplosione" (scientifica) con "epicentro" (principale) Alessandria. In quel periodo **Euclide** scrive la sua opera partendo dall'enunciato delle regole del gioco (definizioni, postulati e assiomi) e procede con metodo rigorosamente deduttivo, incorporando anche, in modo strutturato e sintetico, la conoscenza pregressa, per esempio i risultati raggiunti da Talete, Pitagora ed Eudosso.
Sarà poi il turno di **Archimede**, uno dei più grandi matematici e scienziati di tutti i tempi, che nel III secolo a.C. stabilisce che $3+10/71 < \pi < 3+1/7$.

Segue il tempo della *pax romana*. Successivamente, nel II secolo d.C., ad Alessandria, **Claudio Tolomeo**, il più grande scienziato dell'epoca, cede alla tentazione, matematicamente fondata, di ritenere la Terra un luogo speciale, proponendo la (sua) teoria geocentrica.
Nel IV sec, **Ipazia**, matematica e filosofa alessandrina, viene assassinata. Con questo evento **tramonta (definitivamente) nell'area greco-romana l'era della scienza**.
Proseguendo il nostro viaggio passeremo accanto a quel che resta dell'impero romano ed evidenzieremo che con il Concilio di Nicea e il terzo Concilio di Costantinopoli, anche in ambito religioso si arrivano a fissare degli assiomi (della fede cristiana).
Molte energie della civiltà post romana da quel momento in poi confluiranno su questioni legate all'ambito religioso. Mentre l'Occidente si trova occupato da questioni di teologia, altri però non dormono... **Indiani e arabi** tengono viva la fiamma della conoscenza scientifica e, fra le altre cose, (ci) regalano lo zero e la notazione posizionale. Inoltre ci restituiscono, con gli interessi, gli *Elementi* di Euclide e quei classici che avevamo dimenticato seppellendoli sotto uno spesso strato di teologia. Ricorderemo in particolare **Muhammad ibn Al Khwarizmi** e il matematico indiano **Brahmagupta**, che nel 628 scrive il trattato di astronomia *Brahma-Sphuta-Siddhanta* in cui, fra l'altro, definisce lo zero. Inoltre, nel 700-900 i matematici-astronomi islamici reintroducono la trigonometria (già conosciuta dai greci, che conoscevano anche quella sferica).
Come vedremo, per arrivare ai risultati attuali riguardo a π è necessario l'apporto di tanti contributi. Uno di questi è la possibilità di immagazzinare una grande mole di dati. Con la prima fabbrica di carta a Baghdad nel 794, gli arabi, che avevano imparato l'arte della fabbricazione della carta da un prigioniero cinese, contribuiscono alla diffusione della prima vera "**memoria di massa**".
Poi... si riparte, dall'Italia. Nel 1040 **Guido d'Arezzo** introduce un sistema per scrivere la musica: ut, re, mi, fa, sol, la; manca il si, per il quale bisognerà aspettare cinque secoli, un po' come lo zero per i numeri. Mentre grazie a **Leonardo Pisano** detto **Fibonacci** (1170 circa-1250 circa) si affacciano in Occidente diverse conquiste "aliene" (per noi) nell'ambito matematico, tra cui il sistema di notazione posizionale arabo-indiano.

Partenza

Per alcuni la (nostra) storia potrebbe (*linearmente*) iniziare così:



Per altri, invece, l'inizio della storia partirebbe dal "Grande Architetto".

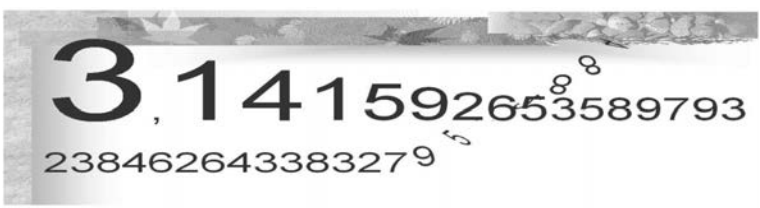
La creazione sarebbe allora incompleta: (π non si vede bene, è "parzialmente emerso"; il demiurgo non è onnipotente o, comunque, vuole lasciare spazio creativo alle creature).

Infine, per altri ancora, l'*incipit* potrebbe essere il seguente:

In questo caso il Creatore potrebbe essere considerato “ipotesi non necessaria”[2].

Ancora, si potrebbe obiettare che questi incipit siano un po’ troppo occidentali (e monoteisti), ma questo è l’humus culturale di chi scrive, che comunque si sforzerà di allargare i propri orizzonti, per cercare di cogliere dinamiche anche non lineari presenti nella storia di π.

A questo punto, disponendo dell’audio, potremmo far partire la sigla di apertura. Ecco il “testo” della canzone su π.



Guardandolo, possiamo pensare ad un modello “creazionista”, secondo il quale “l’universo π” continua ad espandersi, in quanto nuove cifre vengono man mano “create”. Non potendo far suona-

2. Pierre Simon de Laplace, rispondendo a Napoleone, che aveva evidenziato l’assenza di Dio nella sua opera *La mécanique céleste*.

re le pagine, invitiamo il lettore a rintracciare “Challenge of pi” con un motore di ricerca e, una volta individuato il sito, ascoltare la canzone di π (una delle tante)[3].

Ma è tempo di iniziare. Anche se partiamo ricordando la (le) definizione(i) del numero π, chiariamo subito che la sua storia non origina con delle definizioni. Queste vengono dopo e sono precedute da osservazioni. Per esempio, nel nostro caso, qualcuno dei nostri ante-antenati avrà notato che per coprire la lunghezza della circonferenza occorre riportare (circa) tre volte il diametro, indipendentemente dalle dimensioni della circonferenza.

Sempre qualcuno dei nostri progenitori potrebbe aver fatto considerazioni relative all’area e cioè che per ricoprire il cerchio occorrono (circa) tre quadrati di lato pari al raggio, sempre indipendentemente dalle dimensioni del cerchio.

Poi, anche se implicava un gradino superiore di difficoltà, queste considerazioni potrebbero essere state seguite dall’osservazione che entrambe portavano a un unico numero.

Credere che tutto inizi con delle definizioni equivale a credere (alle favole e cioè) a “… un progresso dall’inizio alla fine (…) perfettamente lineare…”, il tutto condotto “… attraverso un ragionamento rigoroso…” e anche “… in un ordine ben determinato e unico che corrisponde alla logica perfetta…”. Fortunatamente la storia non è già scritta e la logica perfetta non esiste, come non esistono ragionamenti rigorosi. Inoltre, il progresso, se ha un inizio, non è detto che abbia un(a) fine. Ciò che *noi oggi* conveniamo come logica perfetta e ragionamento rigoroso è il frutto di successivi faticosi aggiustamenti nel corso del tempo e dello spazio e parlare di inizio di un concetto (matematico) è un po’ come parlare dell’inizio della vita umana: c’è un intervallo di tempo dentro il quale ragionevolmente non possiamo azzardare conclusioni certe.

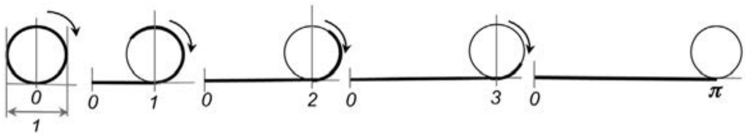
Precisato tutto ciò, possiamo iniziare (veramente).

3. Si può partire dal sito www.polymath.it e rintracciare i link a video e canzoni su π andando a cercare nei “pi day”.

(Una) definizione di π

"π è il rapporto fra la circonferenza e il suo diametro", in formule $\pi = \dfrac{C}{d}$.

La figura che segue illustra il significato geometrico quando $d = 1$.



(Un'altra) definizione di π

"π è il rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del suo raggio", in formule $\pi = \dfrac{A}{r^2}$.

Vediamo, con un procedimento già noto fin dall'antichità, l'equivalenza delle due definizioni.