Ragioni e Limiti del Formalismo

Saggi di filosofia della logica e della matematica

di
Evandro Agazzi

A cura e con una Prefazione *di*
Fabio Minazzi

E

Epistemologia

FrancoAngeli

Ragioni e Limiti del Formalismo

Saggi di filosofia della logica e della matematica

di

Evandro Agazzi

A cura e con una Prefazione *di*

Fabio Minazzi

FrancoAngeli

Volume pubblicato in collaborazione col «Centro Internazionale Insubrico "Carlo Cattaneo" e "Giulio Preti" per la Filosofia, l'Epistemologia, le Scienze cognitive e la Storia della Scienza e delle Tecniche» dell'Università degli Studi dell'Insubria di Varese diretto dal prof. Fabio Minazzi.

Fabio Minazzi (Varese 1955), formatosi con Ludovico Geymonat e Mario Dal Pra, ha conseguito un dottorato di ricerca in Filosofia della scienza con Evandro Agazzi. Ordinario di Filosofia teoretica dell'Università degli Studi dell'Insubria, socio effettivo dell'*Académie Internationale de Philosohie des Sciences* (Bruxelles), ha pubblicato, come autore o curatore, 88 volumi, e più di 400 saggi ed articoli. Con la Presidenza del Consiglio dei Ministri ha promosso un volume enciclopedico di studi internazionali in onore di Agazzi, *Filosofia, Scienza e Bioetica nel dibattito contemporaneo* (Roma 2007), cui hanno collaborato alcuni tra i principali filosofi e studiosi del mondo. Il suo dialogo filosofico diretto con Agazzi e Geymonat è presente nel loro volume collettivo *Filosofia, scienza e verità* (Milano 1989).

Ai miei figli

Indice

Premessa dell'Editore

Con il presente volume la nostra collana Epistemologia *raggiunge il centesimo titolo, dopo oltre quarant'anni nel corso dei quali ha assicurato una sua specifica presenza nel panorama della cultura filosofica italiana. Essa infatti non ha voluto iscriversi nel solco collaudato di una filosofia della scienza intesa essenzialmente come studio "metodologico" tecnicamente specializzato delle diverse scienze, bensì come un contributo alla presa di coscienza critica (e proprio per tale ragione "filosofica") della complessa varietà della nostra civiltà scientifico-tecnologica. Per questo lo spettro delle discipline trattate è stato sin dall'inizio molto ampio, e ha incluso anche la considerazione delle implicazioni etiche e antropologiche della tecno-scienza. Abbiamo inoltre perseguito l'obiettivo di stimolare la produzione* originale *in campo epistemologico e, proprio per questo, abbiamo pubblicato pochissime traduzioni di opere straniere, accogliendo, invece, numerosissime opere valide di autori esordienti. Chi scorre oggi il catalogo dei nostri titoli rimane impressionato di fronte al cospicuo numero di autori che hanno raggiunto alti livelli della carriera accademica, ma questi studiosi erano degli sconosciuti quando pubblicarono con noi i primi frutti delle loro ricerche. Questa è una prova tangibile dell'importante opera di promozione culturale assicurata dalla nostra collana, e una giustificazione del riconosciuto prestigio di cui gode.*

Desideriamo quindi, secondo una prassi abbastanza comune nel caso delle collane scientifiche, segnalare con un certo spicco questo centesimo titolo, per il quale ringraziamo Evandro Agazzi, fondatore e sino ad oggi direttore di questa collana, che ci offre una sua opera, superando quel ritegno che sinora lo aveva indotto a non utilizzare la "sua" collana per pubblicare i suoi testi (si è in effetti limitato a pubblicarvi meno di una decina di volumi come semplice curatore). Il libro, che ora vede la luce con il titolo Ragioni e limiti del formalismo*, svolge in modo eccellente il ruolo di spicco qui accennato, poiché si tratta di una raccolta di saggi scelti nel campo della filosofia della logica e della matematica, che sintetizzano per intero i contributi di Agazzi in uno dei* *settori fondamentali della sua ricerca epistemologica, coprendo l'intero arco della sua attività di studioso, dagli inizi sino ad oggi (ossia, in pratica, durante tutto il periodo d'esistenza di questa collana). Una metà di questi saggi, inoltre, era apparsa in pubblicazioni straniere ed è quindi resa disponibile per la prima volta al pubblico italiano. Quasi in contemporanea con questo libro, esce presso la nostra casa editrice anche il primo fascicolo in veste nuova della gloriosa rivista «Epistemologia», fondata e diretta da Agazzi sin dal 1978 e ora trasferita presso di noi. Questo è per noi un motivo di orgoglio e di auspicio per un crescente ruolo che ci proponiamo di svolgere nel campo della riflessione filosofica sulla tecno-scienza, in un momento della civiltà attuale in cui tale riflessione appare sempre più rilevante e urgente, e siamo anche lieti che ciò avvenga attraverso una vigorosa ripresa di continuità con l'opera di uno studioso che ha collaborato con noi per quasi mezzo secolo affiancato, tanto nella conduzione della collana quanto in quella della rivista, da allievi ormai divenuti anch'essi studiosi di rilievo e chiara fama.*

L'Editore

Prefazione

«Si può anche pensare in simboli. Un uso puramente meccanico delle formule è pericoloso 1) per la verità dei risultati, 2) per la fecondità della scienza. Attraverso il perfezionamento logico della notazione si riesce a scongiurare quasi completamente il primo pericolo. Per quanto riguarda il secondo, la scienza giungerebbe ad un punto di stallo se il meccanismo formale prendesse il sopravvento fino a soffocarne del tutto il pensiero» (Frege [1976], pp. 43-44). Così scriveva, il primo ottobre del 1895 Gottlob Frege a David Hilbert, affrontando il problema degli eventuali vantaggi e dei possibili svantaggi connessi con l'introduzione, nel ragionamento logico e matematico, dei "simboli" al posto delle "parole". Queste considerazioni nascevano dal primo contatto diretto tra Frege ed Hilbert, realizzatosi in occasione di una conferenza svolta dal primo a Lubecca, nel contesto del sessantasettesimo congresso degli scienziati e medici tedeschi del 1895. In genere, questa lettera è interpretata come un documento di limitato interesse, che non riesce ad andare oltre un circoscritto contesto: quello concernente l'uso dei "simboli" in ambito logico-matematico. Effettivamente, la simbolizzazione, di per sé, può infatti considerarsi come un prezioso e utilissimo strumento per favorire un rigoroso livello di formalizzazione, tuttavia non va appunto confusa con la formalizzazione stessa. Possiamo infatti avere sistemi formalizzati non simbolizzati, come possiamo anche avere, invece, trascrizioni simboliche che non costituiscono affatto una formalizzazione. La formalizzazione implica, infatti, l'introduzione esplicita di definizioni o regole in grado di precisare, con rigore, le modalità con le quali i simboli utilizzati possono e devono essere connessi entro una determinata teoria. D'altra parte è anche vero che, proprio nella prospettiva più rigorosa del formalismo hilbertiano, gli assiomi svolgono, esattamente all'interno di un determinato sistema assiomatizzato, una loro funzione meramente meccanica ed "automatica", trasformandosi in una concatenazione di simboli vuoti che possono poi essere eventualmente collegati a contenuti fisici, geometrici, aritmetici o topologici, ma che si collocano su di un piano affatto indipendente, appunto il piano della mera formalità sintattica. In questa prospettiva proprio la trattazione simbolica di un sistema assiomatico offre l'indubbio vantaggio di rendere del tutto manifesto il funzionamento automatico e meccanico del sistema formale, eliminando la possibilità che qualcosa di estrinseco o di eterogeneo contamini la catena delle deduzioni. In questa specifica prospettiva, che interpreta sintatticamente le teorie come l'esplicitazione di una vuota, ma rigorosa, inferenza ipotetico-deduttiva, la simbolizzazione si configura, allora, come lo strumento, indubbiamente più potente, grazie al quale si può, appunto, instaurare la formalizzazione.

Tuttavia, pur entro il più delimitato contesto connesso con la simbolizzazione quale mero sistema di scrittura più rigoroso, non è difficile scorgere nei rilievi di Frege, la presenza prospettica di un ben preciso e assai specifico orizzonte epistemologico, entro il quale si radica, in ultima analisi, la stessa riflessione logica complessiva di Frege. Un'acuta riflessione logica che, infatti, di lì a pochi anni, lo porterà a muovere una puntuale critica, epistemologicamente e logicamente ben fondata, proprio al programma formalista hilbertiano. Del resto, sempre in questa stessa lettera, Frege dimostra, del tutto esplicitamente, di saper apprezzare tutti i vantaggi che l'uso dei "simboli" può arrecare alla ricerca logico-matematica, anche se segnala, al contempo, i pericoli che da esso possono eventualmente scaturire, ritenendo peraltro necessario l'uso del simbolismo. Infatti, sempre a suo avviso, il processo complessivo che in questo ambito di studi si è realizzato sarebbe correttamente rappresentabile da questa considerazione: «ciò che in origine era fatto tutto di pensiero, col tempo si solidifica in un meccanismo che libera in parte il ricercatore dal pensare. Similmente avviene quando si suona: una serie di processi in origine consci devono divenire inconsci e meccanici, perché l'artista, alleggerito, possa abbandonarsi alla musica. Vorrei fare un paragone con il processo di lignificazione: l'albero nei punti in cui vive e cresce dev'essere morbido e succoso; se però la parte succosa non si trasformasse col tempo in legno, l'albero non potrebbe raggiungere un'altezza considerevole; quando per contro tutte le parti verdi si sono lignificate, la crescita cessa» (*ibidem*). Quindi per Frege, in ultima analisi, occorre essere sempre in grado di non «lignificare» completamente le ricerche logiche, facendo in modo che la «parte succosa», concettuale ed eidetica, della ricerca logica possa continuare a vivere e crescere.

Proprio questo pericolo di una eccessiva «lignificazione» dell'intera riflessione logico-matematica gli sembra contraddistinguere, complessivamente, il nuovo programma formalista assiomatico hilbertiano concernente le ricerche metalogiche. Come del resto Frege stesso illustrerà, tempestivamente, ad Hilbert, subito dopo aver letto una sua prima ed innovativa lezione, svolta nel semestre invernale del 1898-99 presso l'Università di Gottinga, sui fondamenti della geometria, *Elementi di geometria euclidea*, lezione nella quale si anticipano le tesi delle celebri *Grundlagen der Geometrie* [1899]. In questa sua presa di posizione, il rilievo critico di fondo che Frege muove ad Hilbert concerne, non a caso, proprio la mancata distinzione tra *definizioni* e *assiomi* e un netto rifiuto della proposta formalista hilbertiana di considerare gli assiomi della geometria quali definizioni implicite degli enti primitivi, giacché gli assiomi, secondo Hilbert, sarebbero appunto in grado di determinare, in modo affatto rigoroso, le relazioni che possono intercorrere tra questi enti primitivi (enti primitivi lasciati volutamente del tutto indeterminati). Per Frege questo modo di procedere formalista non appare affatto giustificato. Non solo perché, in primo luogo, preferisce «suddividere la totalità degli enunciati matematici ponendo da un lato tutte le definizioni e dall'altro tutti gli enunciati rimanenti (assiomi, principi, teoremi)» (ivi, p. 46), come scrive nella sua lettera ad Hilbert del 27 dicembre 1899. Ma anche perché, in secondo luogo, il modo di procedere hilbertiano gli pare vìolare una tradizionale e capitale distinzione che, a suo avviso, deve invece essere salvaguardata e tenuta sempre ben presente, giacché per Frege «con la definizione non si asserisce alcunché, ma soltanto si stabilisce qualcosa. Di conseguenza non è mai lecito presentare come definizione qualcosa la cui verità abbisogni di una dimostrazione o comunque di una fondazione» (ivi, p. 47).

Non solo: secondo Frege «se uno volesse sbarazzarsi del peso di dimostrare qualcosa stabilendo una definizione, ebbene, costui farebbe del gioco di prestigio logico. Proprio per queste ragioni è essenziale, per il rigore delle indagini matematiche, che la distinzione fra le definizioni e tutti gli altri enunciati sia attuata con assoluta precisione. […] Assiomi e teoremi non possono dunque mai stabilire per la prima volta il significato di un segno o di una parola che ricorra in essi, ma, anzi, questo significato deve essere precedentemente fissato». Occorre inoltre tenere presente come in questa sua acuta presa di posizione critica Frege si appelli anche ad una ben diversa concezione degli assiomi, giacché, come ancora scrive esplicitamente ad Hilbert, il logico tedesco attribuisce «il nome di assiomi a enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati, poiché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale. Il fatto che gli assiomi sono veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono fra di loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione» (ivi, p. 48).

Proprio su questo preciso punto si registra il dissenso radicale di Hilbert il quale, rispondendo tempestivamente a Frege, il 29 dicembre 1899, così ribatte: «mi ha molto interessato leggere nella Sua lettera proprio questa frase, poiché io, da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su questo argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di questi assiomi. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza*» (ivi, p. 51, il corsivo è mio). Conseguentemente per Hilbert è assolutamente inaccettabile pretendere di poter definire, in poche righe, un ente geometrico (o matematico): «al contrario, voler dare in tre righe una definizione del punto è a mio modo di vedere una cosa impossibile, poiché una definizione completa di esso la dà piuttosto solo l'intero complesso degli assiomi. Proprio così: ogni assioma contribuisce alla definizione, e quindi ogni nuovo assioma fa variare il concetto. "Punto" è di volta in volta qualcosa di diverso, a seconda che lo consideriamo nella geometria euclidea, non euclidea, archimedea, non archimedea. Secondo il mio modo di vedere – prosegue ancora Hilbert – l'aggiunta di un qualunque assioma, dopo che un concetto è stato stabilito in modo univoco e completo, è qualcosa di assolutamente illecito e non logico, – un errore in cui si incorre molto di frequente, specialmente da parte dei fisici. Nelle ricerche di fisica teorica compaiono spesso evidenti non sensi appunto per il fatto che i fisici assumono senza risparmio nuovi assiomi nel corso della ricerca, senza assolutamente confrontarli con le ipotesi ammesse in precedenza e senza dimostrare se i nuovi assiomi non contraddicano nessuna delle conseguenze tratte dalle precedenti ipotesi. Proprio il procedimento di stabilire un assioma, di appellarsi alla sua verità (?) e di concluderne che esso è compatibile con i concetti definiti è una delle fonti principali di errori e di malintesi nelle moderne ricerche fisiche. Uno degli scopi principali del mio volume dovrebbe essere quello di evitare simili errori» (ivi, p. 52).

Ma allora, ci si potrebbe chiedere, come immagina Hilbert una teoria, alla luce della sua impostazione assiomatica? Per Hilbert «si comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se con i miei punti – prosegue Hilbert – voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino..., allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni fra questi enti perché le mie proposizioni, per esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole: ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di elementi fondamentali. Anzi occorre soltanto applicare una trasformazione biunivoca e convenire che gli assiomi per gli enti trasformati debbano essere uguali a quelli che valgono per i loro corrispondenti» (*ibidem*).

Per Hilbert, pertanto, se si rinuncia a considerare gli assiomi come componenti delle definizioni implicite, si finisce per cercare «qualcosa là dove non c'è nulla» e, quel che è peggio, «l'intera ricerca diviene confusa e vaga e degenera in un giocare a rimpiattino» (ivi, p. 54). Di contro, come poi Frege scriverà al matematico Heinrich Liebmann, dell'università di Heidelberg, il 29 luglio 1900, proprio col metodo formalista di Hilbert delle definizioni implicite degli assiomi, ci si troverebbe invece di fronte «a Münchhausen, che si tira fuori dal pantano aggrappandosi ai propri capelli» (ivi, p. 120). Per Frege non si può infatti mai trascurare la «profonda differenza» che intercorre tra *concetti* ed *oggetti*: se i primi, a suo giudizio, posseggono sempre una natura predicativa – e sono, quindi, per loro intrinseca natura, sempre insaturi – i secondi, invece, non possono mai essere predicato di qualcosa. Su questa base Frege imputa allora a Hilbert di non tener conto della fondamentale e irrinunciabile distinzione tra concetti di primo e di secondo ordine. A suo avviso i concetti di primo grado concernono le note caratteristiche, ovvero concernono le proprietà che un oggetto deve possedere per essere compreso entro un determinato concetto. Così, per ripetere un esempio dello stesso Frege, nell'espressione "La stella della sera è Venere" non attribuiamo al soggetto il predicato "Venere", bensì il predicato "coincidente con Venere". D'altra parte, le proprietà dei concetti non si riferiscono agli oggetti, ma si riferiscono solo ai concetti in quanto tali. Pertanto la non contraddittorietà, oppure anche la proprietà di esistenza, oppure, ancora, la proprietà di appartenenza, concernono esclusivamente e sempre i *concetti*. Frege qualifica questi specifici concetti come concetti di secondo grado, ed elabora poi un procedimento che delinea una gerarchia di concetti che dai concetti di primo grado individua successivi livelli occupati dai concetti di secondo, terzo, quarto grado, etc., etc.

A suo avviso gli elementi di ogni specifico livello vanno, pertanto, accuratamente distinti dagli elementi collocati a differenti livelli. Inoltre, fra gli elementi di un livello e quelli del livello superiore esiste sempre una relazione di subordinazione, in virtù della quale si instaura, genericamente, una relazione in base alla quale "i primi cadono *nei* secondi". Pertanto, in questa peculiare concezione elaborata da Frege, le note caratteristiche di un determinato concetto devono essere tutte omogenee, devono cioè collocarsi tutte al medesimo livello del concetto da loro determinato. Proprio su questa esigenza di omogeneità si radica, da un punto di vista tecnico, la critica di Frege ad Hilbert, giacché le definizioni implicite del formalismo hilbertiano vìolano proprio questa esigenza. Nella lettera a Liebmann del 25 agosto 1900, nella quale Frege riassume, sinteticamente, i termini delle sue critiche ad Hilbert, si ricorda così che «la distinzione fra concetti di primo e di secondo ordine è dunque altrettanto rigorosa di quella fra oggetti e concetti di primo ordine; poiché gli oggetti non possono mai far le veci dei concetti, ne segue che un oggetto non può mai cadere sotto un concetto di secondo ordine; ciò non sarebbe falso, ma senza senso» (ivi, p. 123). Proprio questa è la critica tecnica che Frege rivolge dunque ad Hilbert: «A me pare – scrive conclusivamente Frege – che in un primo momento il professor Hilbert abbia in mente di definire concetti di secondo ordine; ma non li distingua da quelli di primo ordine. Così si riesce a spiegare – ciò che nell'esposizione hilbertiana rimane senza dubbio sempre oscuro – come mai lo stesso concetto venga apparentemente definito due volte. Non si tratta in realtà dello stesso concetto. Dapprima è un concetto di secondo ordine, successivamente un concetto di primo ordine che cade nel precedente. L'errore consiste nella confusione anzidetta; e nel fatto che a entrambi i concetti venga collegata la stessa parola (ad esempio "punto")» (ivi, p. 124).

A mio avviso una considerazione di queste critiche, puntuali ed acute – ad un tempo logiche ed anche epistemologiche – mosse da Frege alla primissima delineazione del programma formalista hilbertiano, deve essere tenuta presente per meglio intendere il preciso, ed autonomo, orizzonte, ad un tempo teorico e prospettico, entro il quale si collocano, complessivamente, i differenti studi di filosofia della logica e della matematica di Evandro Agazzi raccolti nel presente volume (fra l'altro, un'esplicita menzione della disputa qui ricordata tra Frege e Hilbert compare nel primo capitolo di questo libro). Tali studi documentano infatti, in primo luogo, un lungo ed articolato programma di ricerca, dipanatosi, con una sua indubbia coerenza interna, nel corso di più di mezzo secolo di studi e ricerche. Questi saggi ruotano tutti intorno ad una valutazione critica del *valore* e dei *limiti* del formalismo che ha indubbiamente rappresentanto una delle principali conquiste della riflessione logico-matematica del secolo scorso. Come è ben noto Hilbert, con la sua scuola, ha dato vita ad un innovativo programma di ricerca che ha preso a proprio oggetto privilegiato di studio l'analisi dei meccanismi dei processi dimostrativi presenti entro una teoria assiomatizzata. La celebre e ben nota *Beweistheorie* («teoria della dimostrazione») hilbertiana non assume come proprio oggetto di indagine lo studio analitico delle proprietà geometriche, degli algoritmi matematici, delle relazioni aritmetiche, etc. perché studia ed indaga, invece, tutte le *condizioni* che devono essere rispettate, da qualunque sistema assiomatico, onde risultare funzionante. Esattamente entro questo peculiare programma di ricerca formalista acquista allora un ruolo preminente la dimostrazione della *coerenza* di un determinato sistema assiomatico. Nel caso hilbertiano ci si riferisce proprio ad un particolare sistema assiomatico, quello che possiede, al contempo, una struttura semplice e chiara, tale da poter essere dimostrato coerente in modo diretto, e che, inoltre, risulti anche così fecondo che la non-contraddittorietà di tutti i differenti e classici sistemi assiomatici della matematica possano essere ricondotti alla sua stessa non-contraddittorietà. In questo programma finisce così per assumere un ruolo davvero centrale e veramente decisivo il problema della dimostrazione della coerenza di tale specifico sistema assiomatico. Ebbene, la *Beweistheorie* hilbertiana trae alimento proprio dalla radicata convinzione che un tale sistema assiomatico esista e che sia altresì possibile dimostrare direttamente la sua coerenza. A giudizio di Hilbert, aritmetica, analisi e teoria degli insiemi configurano l'intero corpo complessivo della matematica classica e, sempre a suo avviso, questi tre settori sono anche così interdipendenti e tra loro solidali, che la dimostrazione della non-contraddittorietà dell'aritmetica – considerata come il settore più semplice – consentirebbe anche di dimostrare, sia pur ricorrendo a opportuni accorgimenti, la non-contraddittorietà di tutti gli altri settori e, quindi, in definitiva, dell'intera matematica.

In questa prospettiva di ricerca il programma formalista hilbertiano rappresentava non solo una differente soluzione del classico problema dei fondamenti della matematica, ma prospettava anche una diversa soluzione del problema dell'esistenza degli enti matematici. Per i logicisti (Frege e Russell), per i quali gli enti matematici esistono di per sé, possedendo una forma di esistenza autonoma assimilabile, in ultima analisi, a quella del *mondo platonico delle idee*, l'esistenza matematica può configurarsi come un'ipotesi concernente il mondo dell'esperienza. Per questa ragione Russell e Withehead nei loro *Principia Mathematica* presentano, esplicitamente, un'assiomatica intuitiva, ritenendo, appunto, che gli stessi assiomi possano costituire qualcosa di plausibilmente accettato. Al contrario, Brouwer e la sua scuola intuizionista pensano, invece, che l'esistenza matematica debba coincidere con un effettivo criterio di *costruibilità.* Ebbene, in aperto contrasto con queste due classiche soluzioni, logicista ed intuizionista, del problema dell'esistenza degli enti matematici, la prospettiva del formalismo assiomatico hilbertiano suggerisce, invece, che l'esistenza di un ente matematico si radichi nella possibilità di *definirlo senza incorrere in contraddizioni*. In tal modo il formalismo hilbertiano riduce di fatto l'esistenza matematica alla condizione della coerenza, ovvero della non-contraddittorietà, il che fa allora meglio intendere tutto l'interesse specifico e strategico che per questo programma di ricerca formalista assume la dimostrazione, rigorosa, della coerenza dei sistemi assiomatici. Considerato, inoltre, il carattere solidale che pone in relazione i tre fondamentali settori della matematica (aritmetica, analisi e teoria degli insiemi), appare evidente come per Hilbert la dimostrazione della coerenza dell'aritmetica elementare finisse per rappresentare il punto strategico, centrale, di tutto il «programma formalista», espressamente formulato nelle sue due celebri memorie – *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung* [1922] e *Die logischen Grundlagen der Mathematik [1923].*

Tuttavia, proprio lungo questa strategica pista di ricerca formalista, inaugurata dal programma hilbertiano, si colloca l'altrettanto celebre teorema di Kurt Gödel, dimostrato ed illustrato nell'ambito di un suo, non meno famoso, articolo del 1931, consacrato alle *Proposizioni formalmente indecidibili dei* Principia Mathematica *e di sistemi affini*. In questo suo storico contributo Gödel dimostra come non sia affatto possibile ottenere, basandosi su metodi finitisti, una prova di coerenza assoluta per un qualunque sistema formale sufficientemente potente, in grado, cioè, di formalizzare l'aritmetica elementare. In particolare, proprio un corollario al cosiddetto «teorema di Gödel», sbarra la strada al programma hilbertiano, poiché questo corollario precisa che se un sistema formalizzato, sufficientemente potente nel senso soprachiarito, è coerente, allora la proposizione che afferma la sua coerenza non è dimostrabile con i mezzi offerti dallo stesso sistema. Il che consente, appunto, di cogliere tutto il valore rivoluzionario di questa affermazione – rivoluzionario non solo sul piano logico, ma anche su quello filosofico ed epistemologico – giacché alla luce del risultato conseguito da Gödel si può affermare che un sistema formale sufficientemente potente non è mai in grado di giustificarsi dal suo interno, proprio come il barone di Münchhausen – per richiamare l'immagine di Frege! – non può «tirarsi fuori dal pantano aggrappandosi ai propri capelli».

Ma vi sono anche alcune altre conseguenze metamatematiche del «teorema di Gödel», il quale non si limita solo a sancire il fallimento complessivo del programma formalista hilbertiano, ma consegue anche altri importanti risultati: permette infatti di sancire l'impossibilità di formalizzare in modo completo la teoria intuitiva dei numeri e, *last but not least*, fa anche crollare un'illusione, che era stata condivisa non solo da Hilbert, ma anche da un matematico pre-intuizionista di vaglia come Poincaré, ovvero la convinzione che la coerenza di un sistema matematico formale garantisse, di per sé, l'esistenza di un modello in grado di soddisfare quel sistema formale.

Proprio riflettendo sul valore logico, filosofico ed epistemologico del «teorema di Gödel» Agazzi, nella sua *opera prima*, l'*Introduzione ai problemi dell'assiomatica* (1961), aveva già avuto modo di rilevare, puntualmente, come il programma formalista hilbertiano, basato sul metodo assiomatico, avesse anche nutrito la convinzione dell'esistenza di alcune «fondamentali equivalenze tra aspetto semantico e aspetto sintattico del procedimento deduttivo» (Agazzi [1961], p. 194). In altre parole, il metodo assiomatico coltivava la convinzione che la *dimostrabilità* di una determinata proposizione P (ossia il fatto che essa sia una "legge logica") implicasse anche la sua *validità (ossia il suo essere "universalmente vera")* e, analogamente, che la sua derivabilità formale da determinate asserzioni implicasse, al contempo, il suo essere una "conseguenza logica" di tali premesse (ossia che fosse vera in tutti i modelli di queste) (e viceversa). Per questa ragione i logici matematici cercano in generale di dimostrare (quando propongono un calcolo logico) sia il teorema di validità per tale calcolo, in virtù del quale una proposizione dimostrabile (o derivabile) dovrebbe appunto tradursi in una proposizione valida (o che si configura come una "conseguenza logica"), sia il teorema di completezza semantica, in virtù del quale ogni proposizione valida (o che si configura come una conseguenza logica) sarebbe anche dimostrabile (o derivabile). Tuttavia, come è ben noto, questo programma si è realizzato solo in minima parte: senza dubbio per il calcolo proposizionale e per il calcolo dei predicati del primo ordine si può ottenere sia un teorema di validità, sia un teorema di completezza semantica, ma già nel calcolo dei predicati del secondo ordine, mentre si può ancora dimostrare il teorema di validità, non può invece essere dimostrato quello di completezza (si dimostra, anzi, esattamente il contrario, ovvero un teorema di incompletezza, ricavabile dal «teorema di Gödel»!) Se, inoltre, si tiene presente che per costruire una teoria assomatica sufficientemente ricca e potente occorre utilizzare per lo meno una logica dei predicati di secondo ordine (in cui le variabili predicative possono essere quantificate) è agevole scorgere il valore e anche il limite intrinseco del metodo assiomatico. Il suo pregio consiste proprio nel teorema di validità, mediante il quale, se la teoria assiomatizzata è coerente, tutte le formule dedotte al suo interno produrranno, necessariamente, enunciati veri, appunto applicando l'interpretazione che le trasforma in enunciati della teoria assiomatizzata. Ma accanto a questo indubbio vantaggio, connesso alla certezza necessaria di queste formule, il teorema di incompletezza sottolinea, invece, il limite del metodo assiomatico. Infatti una formula che risulta essere vera per tutte le interpretazioni in grado di rendere veri sia gli assiomi della teoria, sia le premesse dalle quali viene ricavata, non è tuttavia necessariamente deducibile, perché non si riesce necessariamente a fornirne una dimostrazione.

In altre parole, tra il piano sintattico e il piano semantico non sussistono affatto tutte quelle fondamentali equivalenze presupposte da una certa ipervalutazione del metodo assiomatico. Sul piano semantico l'insieme delle proposizioni vere risulta essere molto più ampio di quello delle proposizioni dimostrabili, mentre, d'altro canto, sul piano sintattico l'insieme delle proposizioni indimostrabili risulta essere, a sua volta, molto più ampio dell'insieme delle proposizioni false. Infatti le proposizioni vere includono, oltre alle formule dimostrabili, anche alcune formule indecidibili, mentre, di contro, l'insieme delle proposizioni false include, oltre a tutte le formule refutabili, anche alcune formule indecidibili (l'insieme delle formule indimostrabili è dato dall'insieme delle formule indecidibili e da quello delle formule refutabili). A fronte di questa precisa situazione – osservava allora Agazzi, sempre nella sua *opera prima* – «si può vedere anche il diverso ruolo e la pari importanza che da un certo punto di vista assumono i due requisiti della coerenza e della completezza di un sistema assiomatico. Il primo è ciò che ci assicura quello che è stato detto il "vantaggio" dell'applicazione del metodo, e che ci permette di considerare vere tutte le formule deducibili; la mancanza del secondo è ciò che ci costringe a riconoscere l'insufficienza del metodo stesso» (ivi, p. 197).

Utilizzando la nozione di modello (un'interpretazione in grado di trasformare tutte le espressioni formali in proposizioni che risultano essere vere per un determinato universo) si possono allora riformulare anche i requisiti di validità e completezza precedentemente richiamati, rilevando – secondo un'affermazione che risulta logicamente equivalente a quella precedentemente ricordata – che se un insieme è soddisfacibile, allora è coerente (teorema di validità) e che se un insieme è coerente, allora è soddisfacibile (teorema di completezza). Poincaré ed Hilbert, come già ricordato, erano persuasi che tra coerenza e soddisfacibilità esistesse una perfetta equivalenza. Però, come si è visto, mentre la coerenza costituisce sempre una condizione necessaria per avere un modello, di contro, a partire dalla logica dei predicati del secondo ordine, non si ha più la completezza, proprio perché la coerenza non costituisce una condizione sufficiente per l'esistenza di un modello. Possiamo così avere un insieme di formule che ammette un modello, ed è quindi soddisfacibile, ma non è però garantitito che qualunque insieme coerente possieda necessariamente un modello.

Alla luce di queste considerazioni, quali sono allora le conseguenze per la trattazione assiomatica di una teoria deduttiva? In altre parole, una teoria deduttiva può effettivamente essere trattata in modo esauriente entro la forma assiomatica? A fronte di questa domanda occorre ricordare che è possibile dimostrare il teorema di Gödel entro la logica dei predicati del primo ordine e ha dimostrato che la teoria dei numeri costruita entro questa logica è sintatticamente incompleta, poiché esiste una proposizione chiusa P che risulta non essere né refutabile, né derivabile. Va tenuto presente che in questa logica dei