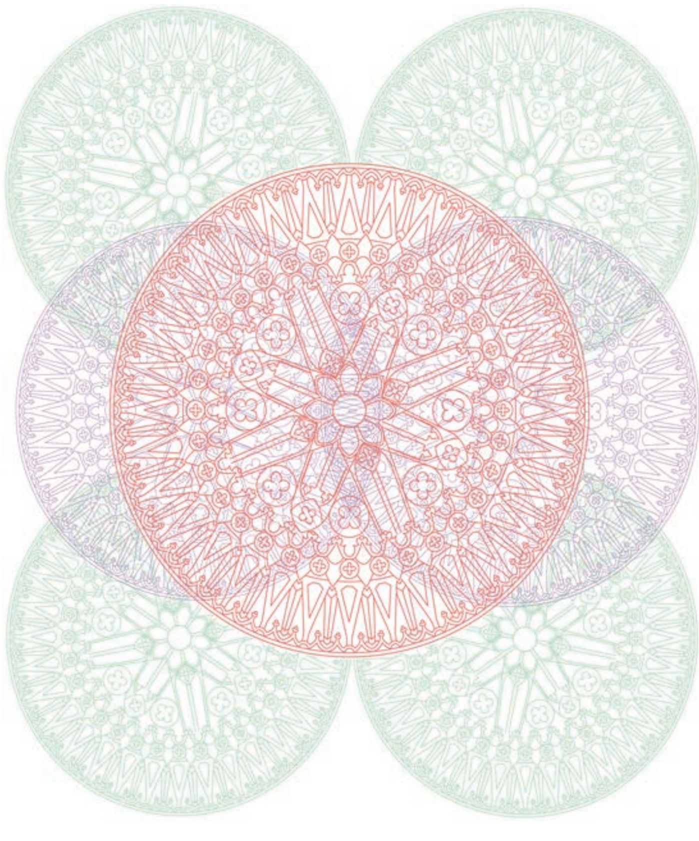
Anna Maria Mantero, Aldo Ferrari

ALGEBRA E ARTE

La magia dei gruppi di simmetria



Serie di architettura e design
FRANCOANGELI

Informazioni per il lettore

Questo file PDF è una versione gratuita di sole 20 pagine ed è leggibile con Adobe Acrobat Reader

La versione completa dell'e-book (a pagamento) è leggibile con Adobe Digital Editions. Per tutte le informazioni sulle condizioni dei nostri e-book (con quali dispositivi leggerli e quali funzioni sono consentite) consulta cliccando qui le nostre F.A.Q.

Adobe
Adobe Digital Editions

A Ilaria e Silvia

Anna Maria Mantero, Aldo Ferrari

ALGEBRA E ARTE

La magia dei gruppi di simmetria

Serie di architettura e design
FRANCOANGELI

Immagine di copertina: Elisa Bassani

INDICE

INTRODUZIONE

Pur non volendo addentrarci nei meandri della fisiologia del cervello umano per cercare di spiegare le ragioni che portano in generale a preferire forme e suoni che si sviluppano secondo un "ordine" o meglio un "ritmo" su ciò che è invece dovuto al puro caso resta, a nostro avviso, incontestabile che anche l'osservatore più distratto riuscirà difficilmente a rimanere indifferente di fronte alla vista delle oltre ottocento colonne di granito, diaspro e marmi preziosi che scandiscono gli spazi interni della "Mezquita" a Còrdoba o alle fantasmagoriche decorazioni dei muri e delle volte della Alhambra a Granada. Non è nemmeno difficile per il lettore interessato trovare un consistente numero di esempi di "ritmo" e "ordine" nell'arte dell'ornamentazione nelle più svariate epoche e culture, anche se non si può negare che gli esempi che hanno sull'osservatore un impatto più immediato si trovino principalmente legate alla cultura islamica che, cosa per altro non del tutto certa, si vorrebbe spinta verso questo stile di manifestazione artistica dal divieto del Corano di rappresentare la forma umana.

Una veloce scorsa all'opera di Owen Jones "The Grammar of Ornament", pubblicata nel 1986, ci dà modo di osservare una rassegna di stili ornamentali dalle origini molto variegate che vanno da quelli tratti dalle "Ornamentazioni delle tribù selvagge" (tavole 1, 2, 3) a quelli relativi all'antico Egitto (tavole da 4 a 11), giungendo fino a quelli contemporanei all'autore dove, ancora una volta, i contenuti simbolici si coniugano ad un fortissimo senso dell'ordine e del ritmo.

Ciò che però ci interessa maggiormente, e costituisce l'idea portante di questa lavoro, è evidenziare come ritmo e ordine non nascono casualmente ma sono spesso codificati da leggi matematiche talmente naturali da divenire ineludibili anche secoli prima di una loro qualsiasi formalizzazione e sostenere che, volenti o nolenti, la ferrea logica della matematica finisce per imporre l'osservanza delle sue leggi anche a chi le ignora.

Quali sono dunque queste leggi che intervengono in così rilevante misura in larga parte dell'arte dell'ornamentazione?

Nel modo più semplice possiamo dire che il problema che si pone l'artista nella costruzione di una ornamentazione "simmetrica" è essenzialmente quello di creare una figura "elementare", una sorta di frammento della creatura che si svilupperà in seguito, rappresentarla in posture diverse ruotandola, riflettendola e traslandola per poi fondere i risultati di queste operazioni in un insieme armonico. La fusione è la parte più sofisticata dell'intera operazione. Uno studio accurato delle decorazioni murali dell'Alhambra a Granada ha rilevato la presenza di 17 tipi diversi di soluzioni del problema. Saranno gli unici? La questione è tanto intrigante da spingere nel corso dell'ultimo mezzo secolo illustri matematici ad occuparsene fino ad ottenerne la soluzione attraverso la formalizzazione della teoria dei gruppi di simmetria del piano che, nel caso bidimensionale, risulteranno esattamente 17. Gli antichi "muratori" dell'Alahambra avevano già risolto il problema, sia pure empiricamente. Sapevano pur non sapendo di sapere, a dimostrazione del fatto che, volenti o nolenti, le leggi della matematica sono talmente naturali da divenire ineludibili anche secoli prima della loro scoperta.

CAPITOLO I

I GRUPPI DI SIMMETRIA DEL PIANO

1. Introduzione ed esempi

Senza entrare in dettagli troppo tecnici si potrebbe dire che un gruppo di simmetria è una sorta di "contenitore" in cui sono racchiusi come oggetti, in linguaggio tecnico "elementi", trasformazioni rigide del piano quali le traslazioni, le riflessioni, le rotazioni e le glissoriflessioni. La scelta della parola "gruppo" è dovuta al fatto che in matematica il gruppo, in generale, è un insieme di elementi che soddisfano certe condizioni di compatibilità. Per maggiore chiarezza se X è un gruppo di simmetria e y è una qualsivoglia figura del piano, che chiameremo "modulo base", si definisce azione del gruppo X su y, o equivalentemente orbita di y generata dall'azione di X, il risultato che si ottiene facendo agire su y tutte le trasformazioni contenute in X. La condizione che X sia un gruppo garantisce che una qualsivoglia sequenza di trasformazioni di X sia ancora un elemento di X.

Le condizione poste riducono il numero dei gruppi di simmetria a ventisei, nel caso piano, suddiviso tra due gruppi finiti o "gruppi dei rosoni", sette gruppi monodimensionali o "gruppi fregio" e diciassette gruppi bidimensionali o gruppi "carta da parati".

A titolo di esempio descriviamo le azioni del gruppo fregio F_1 e del gruppo carta da parati W_4 su due diversi moduli base.

1.1 Azione del gruppo fregio F_1 generato da una traslazione T

Elemento fondamentale o "generatore" di F_1 è una traslazione T, ma il fatto che F_1 sia un gruppo implica che esso, oltre a T, debba contenere una traslazione "neutra" (che non trasla nulla e che rappresentiamo con il simbolo T^0) chiamata "identità" e ancora tutte le traslazioni "prodotto"

$$\ldots, T^{-1} \times T^{-1}, T^{-1}, T, T \times T, T \times T \times T, \ldots$$

che si ottengono facendo agire T una, due, tre... ecc. volte in un senso e nel senso opposto. Gli elementi di F_1 saranno perciò tanti quanti i numeri interi relativi e, per quanto detto in precedenza l'azione di F_1 su un "modulo base y" ha come risultato una infinità di repliche dello stesso disposte, in questo caso, in linea retta lungo la direzione nella quale agisce T e quindi un vero e proprio fregio di lunghezza infinita.

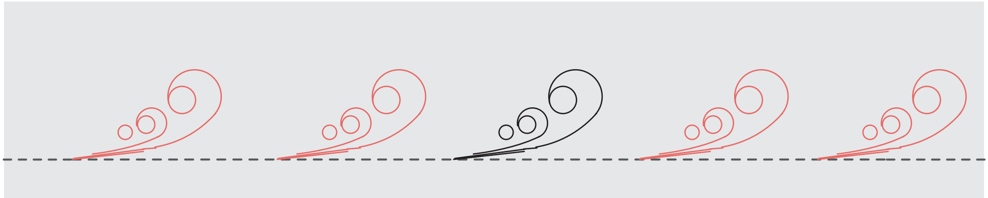


Figura 1 – azione del gruppo F_1

Nel disegno seguente, scelto come modulo base y la figura in nero, l'azione del gruppo F_1 su y si traduce in una stringa infinita di sue repliche.

Se si fosse scelto un modulo base un poco più intrigante, ad esempio uno dei centoventi leoni della strada processionale di Babilonia fatta costruire da Nebukadnezar II, l'orbita ottenuta sarebbe stato il fregio illimitato seguente.

Figura 2 – Berlino: Vorderasiatisches museum, ricostruzione di un frammento del fregio dei leoni della strada processionale di Babilonia

Con questo tipo di linguaggio, se già intorno al 600 a.C. fosse stata formalizzata la teoria dei gruppi di simmetria, l'ideatore del fregio di Babilonia avrebbe potuto costruire una sola figura, osservarne l'orbita generata dall'azione di F_1 su di essa e, non potendo utilizzare un fregio di lunghezza infinita, eliminare la parte ritenuta superflua del risultato.

Volendo approfondire il funzionamento di un gruppo di simmetria nella costruzione di figure che coprono un intero piano consideriamo la cancellata cinquecentesca in ferro battuto che racchiude il portico terreno della "Loggetta Lombardesca" affacciata sul lato orientale dell'edificio dell'ex monastero dei Canonici Lateranensi a Ravenna (cfr. figura 3). Il modo più semplice suggerisce di considerare come modulo base il frammento di cancellata rappresentato in figura 4 e come gruppo di simmetria il gruppo "carta da parati" W_1 generato da due traslazioni T_o e T_v di pari lunghezza che agiscono, rispettivamente, una in senso orizzontale e l'altra in senso verticale.

1.2 Azione del gruppo carta da parati W_1 generato da due traslazioni T_o e T_v

Immaginiamo allora di quadrettare il piano con due schiere di rette parallele (figura 5), le prime verticali e le seconde orizzontali affinché in ogni quadrato che così viene a determinarsi possa essere inserita una replica della figura 4 [nella figura 5 il modulo base è inserito nella casella di coordinate (0,1)]. A questo punto è immediato osservare che il prodotto di due, tre, quattro... traslazioni di tipo T_o crea una replica del "quadrifoglio" in una casella spostata lateralmente di due, tre, quattro... caselle nella stessa direzione di T_o, il prodotto di due, tre, quattro... traslazioni di tipo T_v agisce nello stesso modo in senso verticale mentre il prodotto di una traslazione di tipo T_o per una di tipo T_v, in simboli $T_v \circ T_o$, da come risultato una replica spostata, rispetto all'originale, lungo una diagonale come fosse un alfiere che avesse compiuto un passo sopra una scacchiera.

Risulta pertanto chiaro che partendo dal modulo base inserito in una qualunque casella del piano è possibile moltiplicando opportunamente le traslazioni T_o, T_v, T_o^{-1} e T_v^{-1}, dove T_o^{-1}, T_v^{-1} agiscono in senso inverso di T_o, T_v, raggiungerne una qualsiasi altra prefissata fino a ricoprire l'intero piano.

A titolo di esempio il prodotto $T_o^{-1} * T_v^{-1} * T_o * T_o * T_o * T_o = T_v^{-2} * T_0^{4}$ crea una replica del contenuto di casella (0,1) nella posizione (4,-1) (figura 5).

A questo punto è evidente che facendo agire sulla figura 4 tutte le traslazioni del gruppo W_1 si copre l'intero piano ottenendo così una estensione infinita della cancellata di figura 3 (cfr. figura 8).

Figura 3

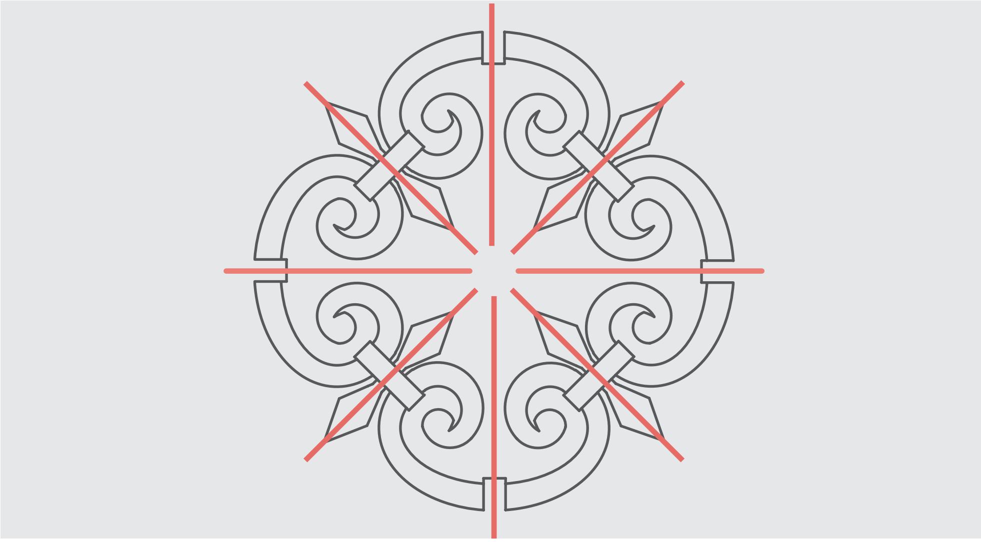


Figura 4

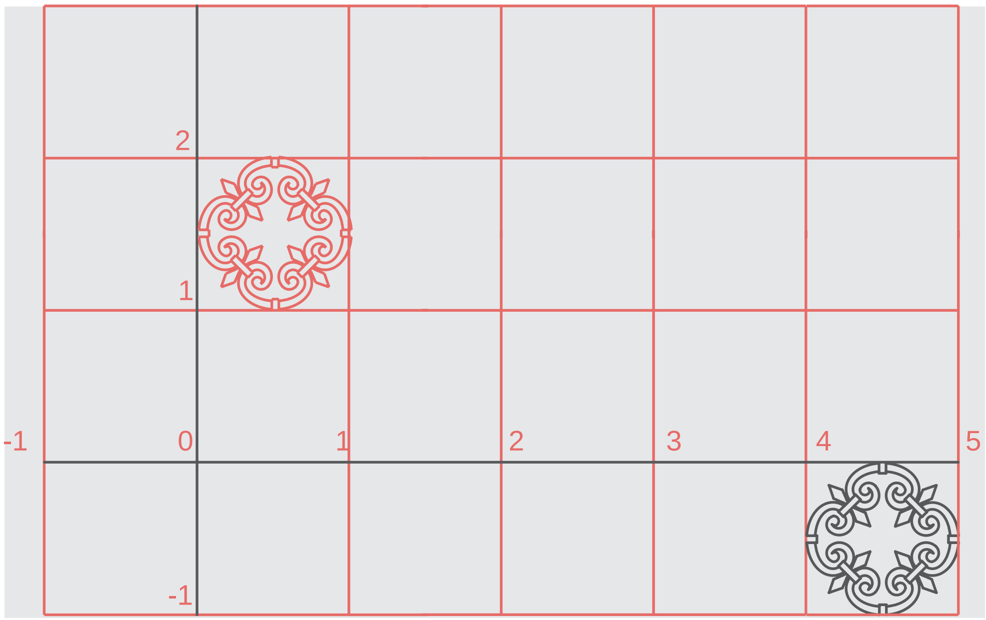


Figura 5

Il discorso potrebbe anche essere a questo punto concluso, però il modulo base scelto presenta una elevata “regolarità”, caratterizzata da quattro assi di simmetria contrassegnati in figura 5a dalle lettere a,b,c e d. Sarà naturale allora provare a sfruttare la porzione di figura 5b a patto di ricorrere ad un gruppo generato da un numero di trasformazioni più elevato. In effetti ciò è reso possibile dal fatto che con quattro rotazioni, rispettivamente di 0°, 90°, 180° e 270° dell’elemento rappresentato in figura 5b si costruisce la figura 5c e che, per ottenere il “quadrifoglio” completo basterà una riflessione della figura 5b attorno all’ asse b (figura 5d). I prodotti, delle rotazioni attorno al centro del quadrifoglio con la riflessione attorno all’asse b, oltre costruire la figura 5a, generano anche nuove riflessioni rispetto agli assi a, c, e d. Utilizzando ora tutti i possibili prodotti in precedenza descritti è facile costatare come, partendo da un frammento decisamente più piccolo del precedente, si ottiene il medesimo risultato di figura 8. Ad ogni modo nelle successive figure 6 e 7 sono messi in evidenza, rispettivamente, gli effetti delle sole traslazioni e di tutti i prodotti aventi come fattori le traslazioni e rotazioni. Nella figura 8, infine è rappresentato il risultato dell’azione di tutti i prodotti aventi come fattori le traslazioni le rotazioni e le riflessioni sul modulo base di figura 5b.

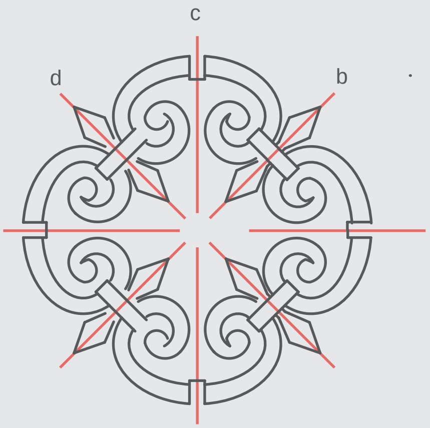


Figura 5 a

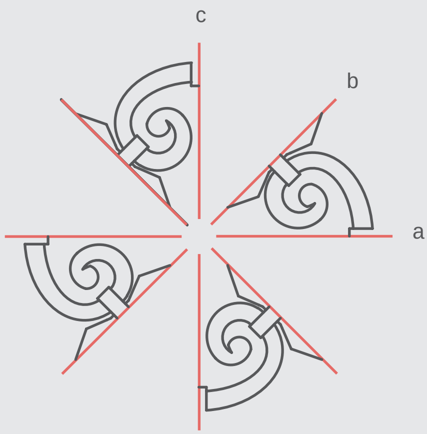


Figura 5 c

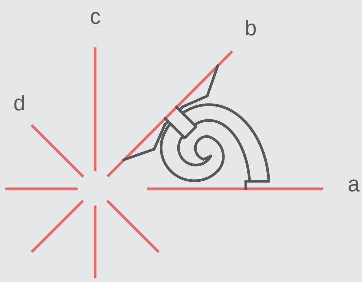


Figura 5 b

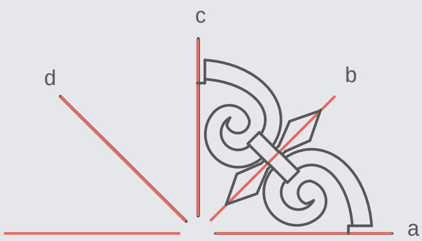


Figura 5 d

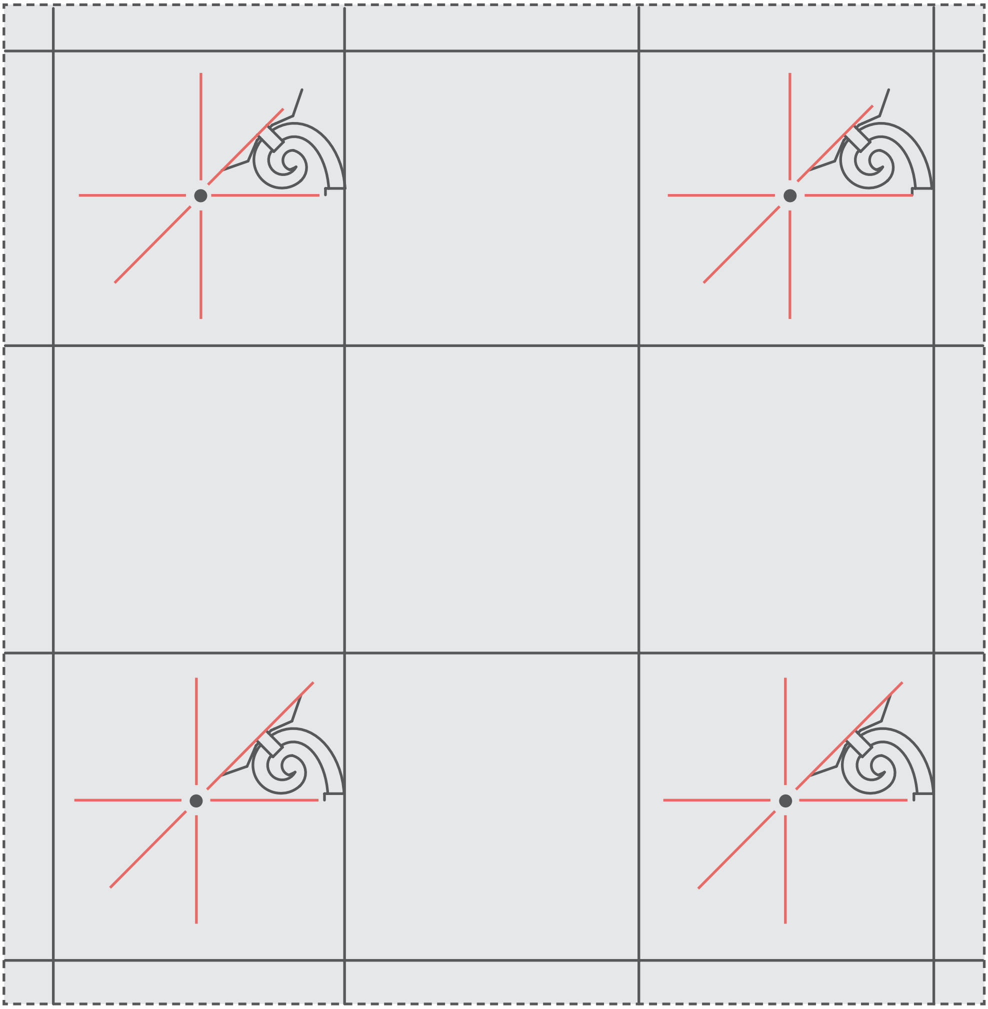


Figura 6

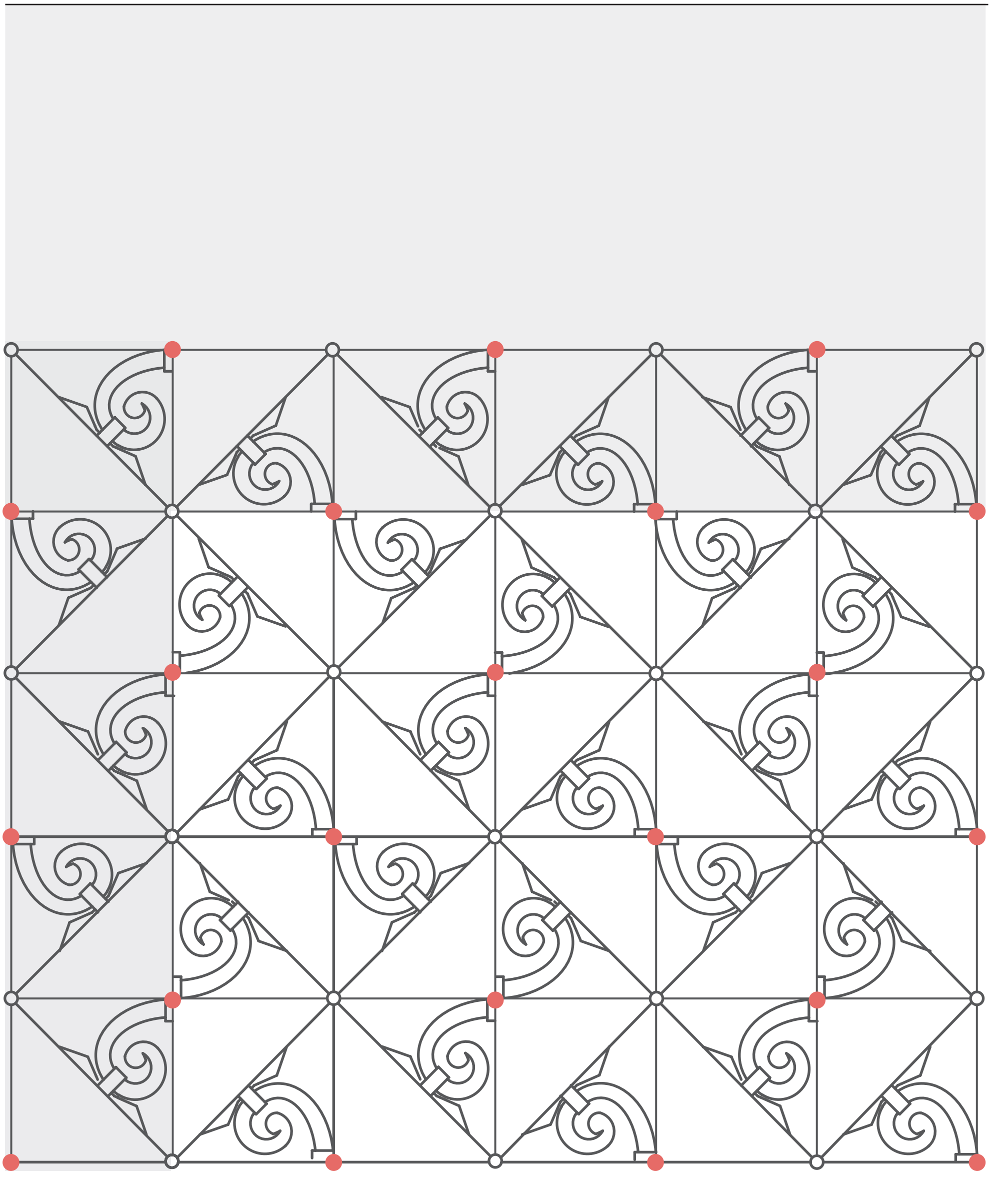


Figura 7
NB. I punti in colore bianco e rosso sono rispettivamente centri di rotazioni
di 90 e 120 gradi

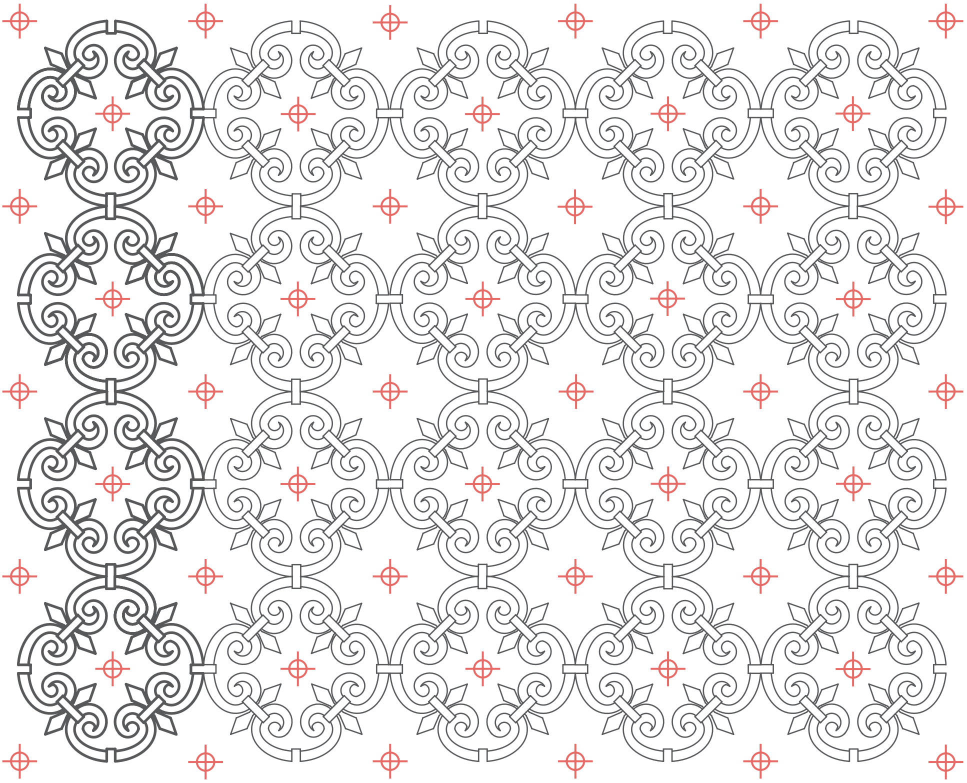


Figura 8
Nella figura sono evidenziati, in rosso, solo i centri di rotazione di 90 gradi

Nel seguito ci capiterà spesso di esaminare gruppi contenenti rotazioni di ampiezza uguale ad un sottomultiplo intero di 360°. Al fine di semplificare il linguaggio conviene definire come ordine di un centro di rotazione il rapporto tra 360° e l'ampiezza minima della rotazione che avviene attorno a quel centro. Dire che un centro ha ordine due, tre, quattro o sei, significa che l'ampiezza minima di una rotazione che avviene attorno ad esso è rispettivamente di 180°, 120°, 90° oppure 60°. Naturalmente attorno ad un centro, ad esempio, di ordine quattro possono avvenire anche rotazioni di 180°, 270°, 360° ecc. come prodotto di due, tre o più rotazioni di 90°, ma mai rotazioni di ampiezza inferiore a 90°.

Per concludere si deve ricordare che oltre alle trasformazioni fin qui viste occorre citare le glissoriflessioni che, dopo aver traslato una figura la riflettono rispetto ad un asse parallelo alla direzione della traslazione. Il fatto che, in questo contesto, non possano esistere altre trasformazioni non è un fatto banale ma il frutto di un teorema dimostrato nel secondo capitolo (cfr. Teorema 1.2).

Passiamo ora all'esame completo di tutti i ventisei gruppi di simmetria.

2. I gruppi finiti del piano ovvero i gruppi dei magnifici rosoni

Si tratta di gruppi che non contengono traslazioni e sono di due tipi:

2.1 a) Gruppo ciclico di ordine n, indicato con il simbolo C_n, contenente n rotazioni distinte aventi tutte il medesimo centro e ampiezza α, 2α, 3α, ecc. dove α si ottiene dividendo 360° per il numero intero n.

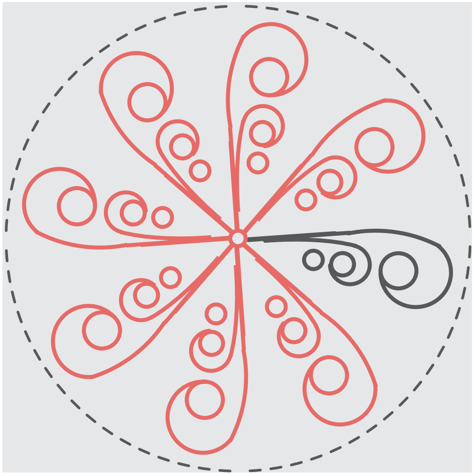


Figura 9 – Azione di un gruppo ciclico di tipo C_8

2.2 b) Gruppo diedrico di ordine n, indicato con il simbolo D_n e contenente n rotazioni distinte aventi tutte il medesimo centro, come in precedenza, e riflessioni rispetto ad assi passanti per il centro di rotazione. Gli assi di riflessione, tanti quante le rotazioni distinte del gruppo, danno luogo ad una stella di rette in cui ognuna di esse forma, con quella immediatamente successiva, sempre lo stesso angolo.