Il Sole 24 ORE

Quotidiano

Data 28-03-2010
Pagina 47
Foglio 1

La geometria secondo David Hilbert

La madre di tutti gli assiomi

di **Umberto Bottazzini**

«Ogni conoscenza umana comincia con intuizioni, procede per concetti e termina con idee». Con questa epigrafe, tratta dalla *Critica della ragione pura* di Kant si aprono i *Fondamenti della geometria* di David Hilbert, il matematico di Königsberg che, non a torto, è stato talvolta definito l'Euclide dell'età moderna. A partire dalla prima pubblicazione nel 1899, infatti, questo libro ha conosciuto dieci successive edizioni, arricchite di aggiunte e supplementi, e innumerevoli traduzioni tanto da diventare ben presto un classico paragonato, non a torto, agli *Elementi euclidei*. L'epigrafe posta in apertura del libro può sembrare solo un semplice omaggio di Hilbert al suo grande concittadino. Ma è lo stesso Hilbert a chiarirne il significato profondo, quando scrive che la geometria «per venire fondata in modo coerente» richiede soltanto «poche, semplici proposizioni fondamentali». Queste proposizioni costituiscono gli assiomi della geometria. La loro esposizione e «l'indagine sui loro mutui rapporti costituiscono un problema che è stato discusso sin dai tempi di Euclide». Questo problema, conclude Hilbert, «porta all'analisi logica della nostra intuizione dello spazio».

Ha dunque ragione Renato Betti quando, nell'introduzione a questa nuova edizione italiana dei *Fondamenti*, osserva che in quell'epigrafe è possibile trovare riassunto in «estrema sintesi il vero programma hilbertiano sull'assiomatica». Sulla nostra intuizione spaziale si basano i concetti della geometria che si costituiscono in una teoria, in "idee", e sono queste l'oggetto di un'indagine logica che prescinde da ogni riferimento contenutistico. Lo scopo dichiarato del libro è infatti di «stabilire per la geometria un sistema di assiomi completo e il più semplice possibile», di dedurre da essi le principali proposizioni geometriche, e di «mettere chiaramente in luce il significato dei diversi gruppi di assiomi e la portata delle conseguenze da trarre dai singoli assiomi». Come osserva Betti, nella formulazione degli assiomi Hilbert «accoglie una forma di apriorismo nella conoscenza dello spazio, che tuttavia è al servizio dell'intuizione sensibile. Allo stesso tempo, toglie ogni riferimento ontologico a oggetti o enti privilegiati in modo da trasformare la geometria da scienza naturale, il cui contenuto è empirico, in una attuale scienza matematica, che supera il problema della natura degli oggetti».

I postulati che Euclide aveva posto alla base degli *Elementi* facevano riferimento al contenuto intuitivo degli enti geometrici. Di punti, linee, piani, figure geometriche aveva dato definizioni che, per quanto poco soddisfacenti ai nostri occhi, avevano lo scopo di affermarne l'esistenza. Per questo Euclide non stabilisce assiomi di esistenza, ma postulati di costruzione, ha commentato Hilbert che, invece, nei suoi *Fondamenti* evita esplicitamente ogni discorso sull'origine e la natura degli enti geometrici e affida la loro esistenza alla non-contraddittorietà del sistema di assiomi adottato. Come mostra Betti nella sua bella introduzione, l'opera di Hilbert è radicata nello sviluppo della geometria, che nel corso dell'Ottocento si è arricchita di «nuovi universi geometrici», universi non euclidei e a più dimensioni che sfidano la nostra intuizione dei fenomeni spaziali.

«Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti» esordisce Hilbert nella celebre «Spiegazione» con cui si apre il volume. Chiamati «punti» gli oggetti del primo sistema, «rette» quelli del secondo e «piani» quelli del terzo sistema, essi stanno in certe relazioni indicate da termini come «giacere», «stare fra», «essere congruente». «La descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni, è data dagli assiomi». Il contenuto geometrico della teoria non è dunque affidato alle suggestioni intuitive evocate dai termini usati. Ma venendo meno il ricorso all'evidenza intuitiva, come assicurarsi che il sistema di assiomi adottato sia non contraddittorio? La tecnica di dimostrazione seguita da Hilbert è quella di costruire un opportuno modello del sistema. Al tempo stesso, la consistenza del sistema assiomatico assicura l'esistenza degli oggetti matematici descritti dal sistema. Certo, «la consistenza è solo relativa e l'esistenza è altamente non costruttiva, ma lo strumento è potente», osserva Betti. «Permette di fornire una descrizione completa di risultati ottenuti in secoli di lavoro da parte dei matematici, di capire qual è la struttura deduttiva che li lega e la loro logica interdipendenza».

Quella di Hilbert è una concezione radicalmente nuova, che all'epoca va incontro alle critiche di coloro che affidano all'intuizione spaziale un ruolo privilegiato e determinante. Ma è la concezione che si è affermata nel corso del Novecento come caratteristica dei sistemi assiomatici moderni.

David Hilbert, «Fondamenti della geometria con i Supplementi di Paul Bernays». Introduzione di Renato Betti, Franco Angeli - Bicocca, Milano, pagg. 320, € 32,00.

Dalle nostre intuizioni sullo spazio nascono le idee con cui costruire i più ambiziosi edifici concettuali


Scienza e filosofia

Una logica per i mondi impossibili

La madre di tutti gli assiomi

Un 3D davvero spaziale

I Preraffaelliti